

HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN  
Wirtschafts- und Sozialwissenschaften an der  
Landwirtschaftlich - Gärtnerischen Fakultät



Nr. 61/2002

Martin Odening  
Jan Hinrichs

Die Quantifizierung von  
Marktrisiken in der Tierproduktion  
mittels Value-at-Risk  
und Extreme-Value-Theory

WORKING PAPER



Luisenstraße 56, D - 10099 Berlin (Mitte), Germany  
tel. + (49) - 30 - 2093 6317; fax: + (49) - 30 - 2093 6301

# Die Quantifizierung von Marktrisiken in der Tierproduktion mittels Value-at-Risk und Extreme-Value-Theory

Martin Odening und Jan Hinrichs

## 1 Einleitung

Die jüngste BSE-Krise und die fast zeitgleich aufgetretene Maul- und Klauenseuche haben Ende 2000 zu erheblichen Turbulenzen auf den deutschen und europäischen Rinder- und Schweinemärkten geführt. Der drastische Preisverfall insbesondere auf dem Rindermarkt hat umfangreiche staatliche Aufkaufaktionen notwendig gemacht, um akute Liquiditätsprobleme der Produzenten abzuwenden. Diese Ereignisse in Verbindung mit der Einschätzung, dass durch die zu erwartende Deregulierung der Agrarmärkte in der Europäischen Union die Erzeugerpreisschwankungen tendenziell zunehmen werden, erwecken den Wunsch nach geeigneten Indikatoren zur Quantifizierung von Marktrisiken. Während die Analyse und die Steuerung von Produktionsrisiken im landwirtschaftlichen Bereich traditionell einen agrarökonomischen Forschungsschwerpunkt bildet, wurde der Quantifizierung und Prognose von Marktrisiken – zumindest aus einzelbetrieblicher Perspektive – bislang vergleichsweise wenig Aufmerksamkeit geschenkt. Demgegenüber hat sich im Finanzbereich das Konzept des Value-at-Risk (VaR) als Standardverfahren in diesem Zusammenhang etabliert (JORION 1997). Es liegen auch bereits Überlegungen zur Übertragung dieses Konzeptes auf den Nichtfinanzbereich vor (DIGGELMANN 1999), und MANFREDO und LEUTHOLD (1999) weisen speziell auf seine Anwendungsmöglichkeiten im Agribusiness hin. ODENING und MUBHOFF (2002) kommen ebenfalls zu dem Schluss, dass sich VaR als Instrument des Risikomanagements im Agribusiness – wenngleich differenzierter als im Bankenbereich – verbreiten wird.

Bei der Anwendung von VaR treten eine Reihe von Spezifikationsfragen und methodischen Problemen auf, von denen einige in diesem Beitrag diskutiert werden sollen. Der Fokus liegt – motiviert durch die einleitenden Bemerkungen zu extremen Ereignissen auf den europäischen Viehmärkten – auf der Frage, inwieweit die Prognose besonders ungünstiger Marktkonstellationen durch die Anwendung der sogenannten Extreme-Value-Theory (EVT) im Vergleich zu herkömmlichen Verfahren der VaR-Schätzung verbessert werden kann. Auf das Potenzial der EVT ist in diesem Zusammenhang in jüngster Zeit mehrfach hingewiesen worden (MCNEIL 1998, DANIELSSON und DE VRIES 2000, DIEBOLD et al. 1998). Eine weitere

Zielsetzung des Beitrages besteht darin, die Schwierigkeiten herauszustellen, die aus einer mittel- bis langfristigen VaR-Prognose resultieren. Während sich der Prognosezeitraum im Finanzbereich meistens auf einen oder wenige Tag(e) beschränkt, dürfte dies im Agrarbereich selten der relevante Zeithorizont sein. Zwar liegt in Gestalt der sog. Square-Root-Regel ein einfach anzuwendendes Verfahren vor, um kurzfristige VaR-Prognosen für einen längeren Zeitraum fortzuschreiben, allerdings setzt diese Regel voraus, dass die betrachteten Zufallsgrößen im Zeitablauf identisch und unabhängig normalverteilt sind. Wir untersuchen am Beispiel der Schweinemast, wie groß der Fehler ist, der mit der Square-Root-Regel bei fehlenden Anwendungsvoraussetzungen verbunden ist und greifen Vorschläge aus der Literatur auf, wie diese Regel gegebenenfalls zu modifizieren ist. Es wird sich zeigen, dass die beiden angesprochenen Problembereiche – die Berücksichtigung von „Fat Tails“ und die zeitliche Aggregation kurzfristiger VaR-Prognosen – zusammenhängen.

Der Beitrag ist wie folgt aufgebaut: Nach einer Definition von VaR und einer kurzen Darstellung traditioneller Schätzverfahren werden in Abschnitt 2 einige Alternativen der Modellierung stochastischer Marktfaktoren diskutiert. Dabei geht es zum einen um die Frage, ob sich eine Volatilitätsprognose auf bedingte oder unbedingte Verteilungen stützen sollte und zum anderen, welche Verteilungsform adäquat ist. Der letzte Punkt dieses Abschnitts geht auf Probleme einer zeitlichen Aggregation von VaR-Schätzern ein. Abschnitt 3 stellt einige Grundlagen der Extreme-Value-Theorie dar und erläutert, wie dieses Konzept zur VaR-Schätzung herangezogen werden kann. In Abschnitt 4 wird die zuvor dargestellte Methodik eingesetzt, um das Marktrisiko in der Schweineproduktion für deutsche Marktverhältnisse zu quantifizieren. Dazu wird auf wöchentliche Preisdaten zwischen 1994 und 2001 zurückgegriffen. Der Beitrag endet mit Schlussfolgerungen für Methodenwahl und Spezifikation von VaR-Modellen im landwirtschaftlichen Kontext.

## **2 Value-at-Risk**

### **2.1 Definition**

Kurz gefasst drückt VaR den maximalen Vermögensverlust aus, den ein Unternehmen innerhalb eines definierten Zeitraumes mit einer bestimmten Irrtumswahrscheinlichkeit in Folge von Marktpreisschwankungen erleiden kann. Sei  $W$  der Wert einer Vermögensposition und  $V$  die zufallsbehaftete Wertänderung dieses Vermögens innerhalb eines Zeitraumes  $h = Dt = t_1 - t_0$ , dann ist VaR wie folgt definiert:

$$\text{VaR} = E(V) - V^* \quad (1)$$

mit  $E(V)$  dem Erwartungswert der Wertänderung und  $V^*$  derjenigen Wertänderung, für die gilt:

$$\int_{-\infty}^{V^*} f(v) dv = \text{Prob}(V \leq V^*) = p \quad (2)$$

Unter Verwendung der Definitionsgleichung  $V = W_{t_0} \cdot X$  mit  $X = \ln(W_{t_1}/W_{t_0})$  lässt sich VaR auch als Funktion der kritischen Rendite  $X^*$  ausdrücken:

$$\text{VaR} = W_{t_0} (E(X) - X^*) \quad (3)$$

wobei  $E(X)$  und  $X^*$  analog zu  $E(V)$  und  $V^*$  definiert sind. Aus (3) wird deutlich, dass die Berechnung von VaR dem Auffinden eines speziellen Quantils der Verteilung der Wertänderung, d.h. der Gewinne bzw. Verluste, gleichkommt. Man spricht auch von der „profit and loss distribution“ (P&L distribution).

## 2.2 Modellierung der Ergebnisverteilungen

Es stellt sich sofort die Frage, durch welche Verteilung empirisch beobachtbare Renditen adäquat abgebildet werden können. In der Literatur besteht Einigkeit darüber, dass finanzwirtschaftliche Daten (Aktienkurse, Indices etc.) durch das Auftreten von Extremwerten charakterisiert sind, d.h., die empirischen Häufigkeitsverteilungen weisen „Fat Tails“ auf (positiver Exzess, Leptokurtosis)<sup>1</sup>. Für die Modellierung des stochastischen Prozesses der Renditen können sich daraus zwei Konsequenzen ergeben (JORION 1997, S. 166 f.): Entweder man verwendet eine leptokurtische Verteilung, z.B. eine t-Verteilung, oder man greift auf ein Modell mit stochastischer Volatilität zurück oder man tut beides zugleich<sup>2</sup>. Für die Verwendung von Modellen mit stochastischer Volatilität spricht die Beobachtung von Volatilitätsclustern bei hochfrequenten (z.B. täglichen) Datenreihen. Damit wird der Wechsel von Phasen relativ geringer und relativ hoher Kursschwankungen beschrieben. Ein solches Verhalten lässt sich

<sup>1</sup> Eine mathematische Präzisierung dieses Begriffs erfolgt in Abschnitt 3.1.

<sup>2</sup> Eine weiterer, pragmatischer Ansatz, der in diesem Zusammenhang als „Stress Testing“ bezeichnet wird, besteht darin, die Wertentwicklung des betrachteten Portfolios für die extremste(n) Situation(en) zu bestimmen, die in der Vergangenheit aufgetreten ist(sind). Diese „Worst Case Analyse“ wird ergänzend zur VaR-Berechnung durchgeführt. Dabei bleibt allerdings unklar, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich ein solches Extremszenario in der Zukunft wiederholt.

beispielsweise mit Hilfe von GARCH-Modellen abbilden. Für die Renditen wird dabei ein stochastischer Prozess der Form

$$X_t = \mathbf{m} + \mathbf{s}_t \mathbf{e}_t \quad (4)$$

angenommen.  $\mathbf{e}_t$  sind identisch und unabhängig verteilte Zufallsvariable (White-Noise-Prozess). In den meisten Anwendungen werden Normal- oder t-Verteilungen für die Störgrößen  $\mathbf{e}_t$  unterstellt. Die Varianz  $\mathbf{s}_t^2$  entwickelt sich in einem GARCH(1,1) Prozess gemäß

$$\mathbf{s}_{t+1}^2 = \mathbf{w}^2 + \mathbf{d}X_t^2 + \mathbf{b}\mathbf{s}_t^2, \quad (5)$$

mit  $\mathbf{w} = \mathbf{g}\bar{\mathbf{s}}^2 > 0$ ,  $\mathbf{d} \geq 0$ ,  $\mathbf{b} \geq 0$ ,  $\mathbf{d} + \mathbf{b} < 1$

$\bar{\mathbf{s}}^2$  ist ein langfristiger Durchschnittswert der Varianz, von dem die aktuelle Varianz nach Maßgabe von (5) abweichen kann. YANG und BRORSEN (1992) zeigen, dass GARCH-Modelle nicht nur für finanzwirtschaftliche Anwendungen relevant, sondern auch für die Beschreibung der Entwicklung täglich gemessener Spotmarktpreise landwirtschaftlicher Produkte geeignet sind.

Die Verwendung von Modellen mit stochastischer Volatilität impliziert ein ständiges Updaten der Varianzen, und es ist zu fragen, für welche Problemstellungen derartige bedingte VaR-Prognosen sinnvoll und notwendig erscheinen. Ausschlaggebend für die Entscheidung zwischen bedingten und unbedingten Vorhersagen ist der angestrebte Prognosezeitraum. Während bedingte Modelle für kurzfristige Prognosen überlegen sind, nimmt ihr Wert mit zunehmendem Zeithorizont ab. Die jüngere Vergangenheit der Datenreihe sagt wenig über die Wahrscheinlichkeit weit in der Zukunft liegender Ereignisse aus (CHRISTOFFERSON und DIEBOLD 2000). Dies gilt insbesondere für die Prognose extremer Ereignisse, von denen angenommen werden kann, dass sie stochastisch unabhängig sind. Aus diesem Grund empfehlen DANIELSSON und DE VRIES (2000) Aussagen über extreme Ereignisse aus unbedingten Verteilungen abzuleiten.

### 2.3 Methoden der VaR-Berechnung

In der Literatur werden drei alternative Verfahren zur Berechnung von VaR genannt, die im Folgenden kurz angesprochen werden sollen. Ausführlichere Beschreibungen finden sich bei JORION (1997) oder DOWD (1998).

### *Varianz-Kovarianz-Methode*

Die Varianz-Kovarianz-Methode (VKM), auch als parametrische, analytische oder Delta-Normal-Methode bezeichnet, bestimmt VaR direkt als Funktion der Standardabweichung der Portfoliorendite  $\acute{o}$ . Unterstellt man für die Rendite eine Normalverteilung, so gilt:

$$\text{VaR} = W_{t_0} \cdot c \cdot \mathbf{s} \cdot \sqrt{h}. \quad (6)$$

Dabei bezeichnet  $c$  das zu  $p$  gehörende Quantil der Standardnormalverteilung, und  $\sqrt{h}$  passt den gewünschten Prognosezeitraum (Holding Period) an den Bezugszeitraum der Volatilität  $\acute{o}$  an<sup>3</sup>. Diese wird aus den Varianzen und Kovarianzen der verschiedenen Portfoliokomponenten und Marktfaktoren  $\mathbf{s}_{ij}$  berechnet:

$$\mathbf{s}_p = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i \cdot w_j \cdot \mathbf{s}_{ij} \right)^{0.5} \quad (7)$$

Darin sind  $w$  die Gewichte der Portfoliobestandteile  $i$  und  $j$ . Als Vorteile der VKM werden der geringe Rechenaufwand, und die Möglichkeit Wenn-Dann-Analysen durchzuführen, genannt. Probleme treten auf, wenn die Rückflüsse des betrachteten Portfolios in nichtlinearer Weise von den zugrunde liegenden Risikofaktoren abhängen, was typischerweise bei Optionen der Fall ist. Die Verteilung der Portfoliorenditen weist dann eine Schiefe auf und ist nicht mehr normal. Für Anwendungen im Agribusiness erscheint diese Einschränkung derzeit aber nicht gravierend. Im Zusammenhang mit der Prognose extremer Ereignisse wird insbesondere die oben angesprochene Normalverteilungsannahme kritisiert, die zu einer Unterschätzung des VaR führt.

### *Monte-Carlo-Simulation*

Bei dieser Methode wird die gesamte Verteilung der Wertänderung des Portfolios generiert und VaR als entsprechendes Quantil aus dieser relativen Häufigkeitsverteilung abgegriffen. Daher rührt auch die Bezeichnung „Full Valuation Method“. Die Simulation vollzieht sich in folgenden Schritten<sup>4</sup>:

- Auswahl von Verteilungen bzw. stochastischen Prozessen für die relevanten Risikofaktoren und Schätzung der zugehörigen Parameter, insbesondere Varianzen und Korrelationen

---

<sup>3</sup> Auf die Probleme, die mit dieser Vorgehensweise verbunden sind, wird in Abschnitt 2.4 eingegangen.

- Simulation von Zufallspfaden für die Risikofaktoren
- Bewertung des Portfolios bzw. seiner Bestandteile an Hand der Realisation der Zufallsvariablen für den gewünschten Prognosezeitraum („mark-to-market“)
- Wiederholung der beiden vorgenannten Schritte, bis eine hinreichende Genauigkeit gegeben ist
- Berechnung der Gewinne bzw. Verluste bezogen auf den gegenwärtigen Zeitpunkt, Ordnung in aufsteigender Reihenfolge, Bestimmung der empirischen Häufigkeitsverteilung

Als größter Vorteil der Monte-Carlo-Simulation ist die Flexibilität bezüglich der Verteilungsannahmen zu sehen. Nachteilig ist der hohe Rechenaufwand im Fall komplexer Portfolios.

### *Historische Simulation*

Die Historische Simulation (HS) gleicht hinsichtlich der Schrittfolge der Monte-Carlo-Simulation, mit dem Unterschied, dass die Wertänderungen nicht mittels Zufallszahlensimulator generiert, sondern direkt aus Vergangenheitsdaten abgeleitet werden. Somit ist keine explizite Verteilungsannahme notwendig und die diesbezügliche Kritik an der VKM greift hier nicht. Allerdings wird implizit von einer Verteilungskonstanz ausgegangen. Als problematisch erweist sich, dass die empirische Verteilungsfunktion zwar um den Mittelwert relativ glatt verläuft, jedoch angesichts der geringen Anzahl von extremen Stichprobenwerten an den Rändern diskrete Sprünge aufweist. Je größer bzw. kleiner die gewünschte Wahrscheinlichkeit ist, umso unsicherer wird die Schätzung des zugehörigen Quantils, und entsprechend empfindlich reagiert sie auf Veränderungen des Datensamples. Über Ereignisse, die schlechter sind als das Stichprobenminimum kann per definitionem nichts ausgesagt werden. Möglichkeiten, diese Probleme zu umgehen, bietet die Extreme-Value-Theory, die in Abschnitt 3 beschrieben wird.

## **2.4 Long-Term-Value-at-Risk**

Aus der Sicht landwirtschaftlicher Unternehmen besteht Bedarf, VaR-Prognosen zu erstellen, deren Horizont größer ist als das Messintervall der zugrunde liegenden Daten, etwa auf der Basis wöchentlicher Daten das VaR für drei oder sechs Monate zu bestimmen. Es existieren grundsätzlich zwei Möglichkeiten, VaR-Prognosen für eine längere „Holding-Period“ zu erstellen: Entweder man misst die Wertveränderungen über den Zeitraum, den es zu prognosti-

---

<sup>4</sup> Zu Einzelheiten der praktischen Umsetzung siehe WINSTON (1998, S. 345).

zieren gilt, d.h. man schätzt das VaR auf der Basis drei- oder sechsmonatiger Renditen, oder man rechnet eine kürzerfristige (z.B. wöchentliche) VaR-Schätzung auf den gewünschten Zeitraum hoch. Das erstgenannte Vorgehen ist unabhängig von der Renditeverteilung möglich; es weist allerdings den gravierenden Nachteil auf, dass sich die Zahl der Beobachtungen stark reduziert. Stehen beispielsweise wöchentliche Daten über einen Zeitraum von 10 Jahren zur Verfügung und soll ein Halbjahres-VaR berechnet werden, so kann sich die Schätzung nur auf 20 Beobachtungen stützen. Für die zweite Vorgehensweise, die Hochrechnung von VaR-Schätzungen (Time-Scaling, Time-Aggregation), wird häufig die Square-Root-Regel herangezogen<sup>5</sup>:

$$\text{VaR}(h) = \text{VaR}(1) \cdot \sqrt{h} \quad (8)$$

Darin ist  $\text{VaR}(1)$  das Ein-Perioden-VaR und  $\text{VaR}(h)$  entsprechend das  $h$ -Perioden-VaR. DIEBOLD et al. (1997) zeigen, dass eine fehlerfreie Umrechnung mittels (8) an verschiedene Bedingungen geknüpft ist. Erstens, darf sich die Struktur des betrachteten Portfolios im Zeitablauf natürlich nicht ändern. Zweitens, müssen die Renditen identisch und unabhängig verteilt sein (iid Annahme), und drittens, müssen sie normalverteilt sein. Von der Strukturkonstanz des Portfolios soll im Weiteren ausgegangen werden. Wie (8) zu modifizieren ist, falls die iid-Annahme erfüllt ist, jedoch keine Normalverteilung, sondern eine Fat-Tail-Distribution vorliegt, wird in Abschnitt 3.1 diskutiert. An dieser Stelle soll der Frage nachgegangen werden, wie das Time-Scaling bei Verletzung der iid-Annahme vorzunehmen ist. Allgemeingültige Aussagen hierzu liegen nicht vor, allerdings haben DROST und NIJMAN (1993) für einen GARCH-Prozess gezeigt, wie Volatilitäten zeitlich korrekt zu aggregieren sind. Für den oben beschriebenen GARCH(1,1)-Prozess beispielsweise, lassen sich die  $h$ -Periodenvolatilitäten aus den Ein-Periodenvolatilitäten wie folgt ermitteln:

$$\mathbf{s}_{t+1}^2(h) = \mathbf{w}(h)^2 + \mathbf{d}(h)X_t^2(h) + \mathbf{b}(h)\mathbf{s}_t^2(h) \quad (9)$$

$$\text{mit } \mathbf{w}(h) = h\mathbf{w} \frac{1 - (\mathbf{d} + \mathbf{b})^h}{1 - (\mathbf{d} + \mathbf{b})}$$

$$\mathbf{d}(h) = (\mathbf{d} + \mathbf{b})^h - \mathbf{b}(h)$$

---

<sup>5</sup> Die Square-Root-Regel findet beispielsweise auch in dem verbreiteten RiskMetrics-Modell der JP Mogan Investmentbank Anwendung.

und  $|\mathbf{b}(h)| < 1$  als Lösung der quadratischen Gleichung

$$\frac{\mathbf{b}(h)}{1 + \mathbf{b}^2(h)} = \frac{a - (\mathbf{d} + \mathbf{b})^h - b}{a(1 + (\mathbf{d} + \mathbf{b})^{2h}) - 2b}$$

Darin sind die Koeffizienten  $a$  und  $b$  wie folgt definiert:

$$a = h(1 - \mathbf{b})^2 + 2h(h-1) \frac{(1 - \mathbf{d} - \mathbf{b})^2 (1 - 2\mathbf{d}\mathbf{b} - \mathbf{b}^2)}{(\mathbf{k} - 1)(1 - (\mathbf{d} + \mathbf{b})^2)} \\ + 4 \frac{(h-1 - h(\mathbf{d} + \mathbf{b}) + (\mathbf{d} + \mathbf{b})^h)(\mathbf{d} - \mathbf{d}\mathbf{b}(\mathbf{d} + \mathbf{b}))}{1 - (\mathbf{d} + \mathbf{b})^2}$$

$$b = (\mathbf{d} - \mathbf{d}\mathbf{b}(\mathbf{d} + \mathbf{b})) \frac{1 - (\mathbf{d} + \mathbf{b})^{2h}}{1 - (\mathbf{d} + \mathbf{b})^2}$$

$\mathbf{k}$  bezeichnet die Kurtosis der Renditeverteilung

(9) unterscheidet sich nicht nur optisch von (8). Vielmehr bestehen systematische Unterschiede, die mit zunehmendem  $h$  größer werden. Geht  $h$  gegen unendlich, streben  $\mathbf{d}$  und  $\hat{a}$  in (9) gegen Null, so dass die stochastischen Terme keinen Einfluss mehr haben. Lediglich der erste, deterministische Term bleibt und wächst. Das bedeutet, dass zwar das durchschnittliche Niveau der  $h$ -Perioden-Volatilität in beiden Fällen übereinstimmt, allerdings weist die Square-Root-Regel auch eine Zunahme der Schwankungen der Volatilität aus, während sie sich tatsächlich mit größer werdendem Zeithorizont verkleinert. DIEBOLD et al. (1997) zeigen anhand von Simulationsexperimenten, wie groß der Unterschied zwischen beiden Methoden im konkreten Einzelfall aussehen kann. Entsprechende Rechnungen für die von uns betrachtete Anwendung werden in Abschnitt 4 vorgestellt.

### 3 Extreme-Value-Theory

In Abschnitt 2.3 wurden traditionelle Verfahren zur VaR-Schätzung beschrieben. Bezüglich der Prognose sehr seltener Ereignisse wurden sowohl bei der VKM als auch bei der HS Nachteile deutlich. Einen Ansatz zur Verbesserung der Schätzgüte extremer Quantile bietet die Extreme-Value-Theorie (EVT)<sup>6 7</sup>. Sie liefert spezielle statistische Grundlagen für die Schätzung der Ränder von Wahrscheinlichkeitsverteilungen, von denen einige nachstehend

<sup>6</sup> EMBRECHTS et al. (1997, S. 364) beschreiben das Anliegen der EVT plakativ als „Mission Impossible: How to Predict the Unpredictable“.

<sup>7</sup> Alternativ zur EVT verwendet LI (1999) einen semiparametrischen Ansatz, der neben der Varianz auch Schiefe und Kurtosis der Renditeverteilung bei der VaR-Schätzung berücksichtigt.

kurz angesprochen werden sollen. Eine ausführliche Darstellung findet sich bei EMBRECHTS et al. (1997).

### 3.1 Grundlegende Konzepte

Zentrales Anliegen der EVT ist es, Aussagen über Stichprobenextrema (Maxima oder Minima) zu treffen. Genauer gesagt wird gefragt, gegen welche Verteilung Stichprobenextremwerte streben. Eine herausgehobene Stellung hat dabei die sog. Verallgemeinerte Extremwertverteilung (GEV). Mit Hilfe des Fisher-Tippett-Theorems lässt sich zeigen, dass normalisierte Stichprobenmaxima für eine sehr große Zahl von Verteilungen mit zunehmendem Stichprobenumfang gegen die verallgemeinerte Extremwertverteilung konvergieren. Seien  $X_1, X_2, \dots, X_n$  iid Zufallsvariablen (ZV) aus einer unbekanntem Verteilung  $F$ , und  $a_n$  und  $b_n$  geeignete Normalisierungskoeffizienten, dann gilt für die Stichprobenmaxima  $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ :

$$p \lim \left( \frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x \right) = H(x) \quad (10)$$

$p \lim$  meint den Grenzwert der Wahrscheinlichkeit für  $n \rightarrow \infty$ , und  $H(x)$  bezeichnet die GEV, die wie folgt definiert ist:

$$H(x) = \begin{cases} \exp\left(-(1 + \mathbf{x}x)^{-1/\mathbf{x}}\right) & \text{für } \mathbf{x} \neq 0 \\ \exp(-e^x) & \text{für } \mathbf{x} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Die GEV beinhaltet drei Extremwertverteilungen als Spezialfälle, die Frechet-Verteilung ( $\mathbf{x} > 0$ ), die Weibull-Verteilung ( $\mathbf{x} < 0$ ) und die Gumbel-Verteilung ( $\mathbf{x} = 0$ ). Weiterhin lassen sich Verteilungen  $F$  in Abhängigkeit des Parameters  $\mathbf{x}$  als fat tailed ( $\mathbf{x} > 0$ ), thin tailed ( $\mathbf{x} = 0$ ) und short tailed ( $\mathbf{x} < 0$ ) klassifizieren. Im vorliegenden Kontext gilt die Aufmerksamkeit der erstgenannten Klasse, zu der beispielsweise die  $t$ -Verteilung und die Pareto-Verteilung, aber nicht die Normalverteilung gehören. EMBRECHTS et al. (1997, S. 131) zeigen, dass die Stichprobenmaxima einer Verteilung  $F$ , die "Fat Tails" aufweist, gegen die Frechet-Verteilung  $\Phi(x) = \exp(x^a)$  konvergiert, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$1 - F(x) = x^{-1/\mathbf{x}} L(x) \quad (12)$$

(12) entspricht der Forderung, dass der Rand der Verteilung  $F$  gemäß einer Potenzfunktion ausläuft. Darin ist  $L(x)$  eine langsam variierende Funktion, die häufig als Konstante gewählt wird, und  $\mathbf{a} = 1/\mathbf{x}$  ist der Tail-Index der Verteilung. Je kleiner  $\mathbf{a}$  ist, umso größeres Gewicht haben die Ränder der Verteilung  $F$ . Für das weitere Vorgehen lässt sich schlussfolgern, dass sich Wahrscheinlichkeiten bzw. Quantile für den äußersten Rand einer nicht notwendigerweise bekannten Verteilung  $F$  mit "Fat Tails" bestimmen lassen, indem der Tail Index  $\mathbf{a}$  auf geeignete Weise geschätzt wird. In Abschnitt 3.2 wird ein solches Schätzverfahren für  $\mathbf{a}$  beschrieben.

Die Erkenntnisse der EVT haben auch Implikationen für das oben diskutierte Problem der Konversion kurzfristiger in längerfristige VaR-Prognosen. Angenommen, für eine Ein-Perioden-Rendite  $X$  gilt  $P(|X| > x) = Cx^{-\mathbf{a}}$ , dann folgt auf Grund der näherungsweise linearen Additivität der Ränder von Fat-Tail-Verteilungen (DANIELSSON und DE VRIES 2000):

$$P(X_1 + X_2 + \dots + X_h > x) = hCx^{-\mathbf{a}} \quad (13)$$

Das bedeutet, die Hochrechnung der Einperioden-VaR-Prognose für  $h$  Perioden erfolgt bei fat-tailed Renditen unter der iid-Annahme mittels:

$$\text{VaR}(h) = \text{VaR}(1) \cdot h^{1/\mathbf{a}} \quad (14)$$

Weisen die Renditen endliche Varianzen auf, impliziert dies  $\mathbf{a} > 2$  und somit einen kleineren Skalierungsfaktor als von der Square-Root-Regel postuliert (DANIELSSON et al. 1998). Somit ist die Square-Root-Regel nicht nur bei Verletzung der iid-Annahme zu hinterfragen, sondern gleichfalls, wenn die Verteilung der Renditen durch "Fat Tails" charakterisiert ist.

### 3.2 Schätzung des Tail-Index

Um den Rand der Fat-Tail-Verteilung  $F(x)$  aus empirischen Daten zu schätzen und Quantile dieser Verteilung zu bestimmen, kann auf verschiedene Schätzverfahren zurückgegriffen werden. Ein verbreitetes Verfahren ist der Hill-Estimator (DIEBOLD et al. 1998). Dazu sind die beobachteten Verluste  $X$  der Größe nach zu ordnen:  $X_1 > X_2 > \dots > X_k > \dots > X_n$ . Der Tail-

Index  $\mathbf{a} = 1/\mathbf{x}$  kann dann wie folgt geschätzt werden:

$$\hat{\mathbf{a}}(k) = \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln X_i - \ln X_{k+1} \right)^{-1} \quad (15)$$

Die Funktion  $L(x)$  in (12) wird durch eine Konstante  $C$  approximiert. Deren Schätzer lautet (EMBRECHTS et al. 1997, S. 334):

$$\hat{C}_k = \frac{k}{n} X_{k+1}^{\hat{\mathbf{a}}} \quad (16)$$

Daraus ergeben sich für den Rand der Verteilung  $F(x)$  und das  $p$ -Quantil  $x_p$  die Schätzer:

$$\hat{F}(x) = p = \frac{k}{n} \left( \frac{X_{k+1}}{x} \right)^{\hat{\mathbf{a}}}, x > X_{k+1} \text{ bzw.} \quad (17)$$

$$\hat{x}_p = F^{-1}(p) = X_{k+1} \left( \frac{k}{np} \right)^{\frac{1}{\hat{\mathbf{a}}}} \quad (18)$$

Von dem Hill-Estimator kann gezeigt werden, dass er konsistent und asymptotisch normalverteilt ist (DIEBOLD et al. 1998).

Die Durchführung der Schätzung setzt die Festlegung des Grenzwertes  $X_k$  bzw. die Anzahl der Stichprobenwerte  $k$  voraus, die in die Schätzung einbezogen werden. Unglücklicherweise kann das Schätzergebnis stark durch diese Wahl beeinflusst werden. Zudem besteht ein Trade-Off: Je mehr Daten man für die Schätzung des Tail-Index  $\mathbf{a}$  verwendet, um so geringer wird die Varianz des Schätzers; allerdings erhöht sich gleichzeitig der Bias, denn die unterstellte Potenzfunktion (12) gilt eben nur für den Rand der Verteilung. Um dieses Problem zu lösen, entwickeln DANIELSSON et al. (2001) ein Bootstrap-Verfahren zur Bestimmung des Stichprobenanteils  $k/n$ . Mit  $k$  wird die Anzahl der Extremwerte bezeichnet, welche den gewählten Schwellenwert  $X_k$  überschreiten und die Datengrundlage für die Berechnung des Tail-Index bilden. Bei dem Bootstrap-Ansatz handelt es sich um ein mehrstufiges Verfahren, bei dem die einzelnen Schritte bis zum Auffinden des optimalen Stichprobenanteils  $k/n$  wiederholt zu durchlaufen sind.

In der ersten Stufe werden  $l$  Wiederholungsstichproben  $N_{n_l}^* = \{X_1^*, \dots, X_{n_l}^*\}$  mit einem gegebenen Umfang  $n_l < n$  aus der Gesamtmenge der Daten  $N_n = \{X_1, \dots, X_n\}$  mit Zurücklegen gezo-

gen und für ein  $k_l$  der asymptotische mittlere quadratische Schätzfehler (AMSE)  $Q(n_1, k_1)$  wie folgt geschätzt:

$$Q(n_1, k_1) = E \left[ \left( M_{n_1}^*(k_1) - 2(\mathbf{x}_{n_1}^*(k_1))^2 \right)^2 \mid \mathbf{N}_n \right] \quad (19)$$

$$\text{mit } M_{n_1}^*(k_1) = \frac{1}{k_1} \sum_{i=1}^{k_1} (\ln X_{n_1, i}^* - \ln X_{n_1, k_1+1}^*)^2 \text{ und} \quad (20)$$

$$\mathbf{x}_{n_1}^*(k_1) = \frac{1}{k_1} \sum_{i=1}^{k_1} \ln X_{n_1, i}^* - \ln X_{n_1, k_1+1}^* \quad (21)$$

$k_{1,0}^*(n_1)$  bezeichnet denjenigen Wert  $k_l$ , der den AMSE (19) minimiert:

$$k_{1,0}^*(n_1) = \operatorname{argmin} Q(n_1, k_1) \quad (22)$$

Anschließend wird in einem zweiten Schritt  $k_{2,0}^*(n_2)$  ganz analog mit einem kleineren Stichprobenumfang  $n_2 = \frac{(n_1)^2}{n}$  bestimmt.

In einem dritten Schritt wird  $\hat{k}_0(n)$  berechnet:

$$\hat{k}_0(n) = \frac{(k_{1,0}^*(n_1))^2}{k_{2,0}^*(n_2)} \left( \frac{(\ln k_{1,0}^*(n_1))^2}{(2 \ln n_1 - \ln k_{1,0}^*(n_1))^2} \right)^{\frac{\ln n_1 - \ln k_{1,0}^*(n_1)}{\ln n_1}} \quad (23)$$

Im darauf folgenden vierten Schritt kann  $\mathbf{x}$  mittels  $\mathbf{x}_n \left( \hat{k}_0 \right)$  geschätzt werden:

$$\mathbf{x}_n \left( \hat{k}_0 \right) = \frac{1}{\hat{k}_0} \sum_{i=1}^{\hat{k}_0} \ln X_{n_1, i}^* - \ln X_{n_1, \hat{k}_0+1}^* \quad (24)$$

Die beschriebene Schätzung von  $k$  hängt von zwei Parametern ab, der Anzahl der Bootstrap-Wiederholungsstichproben  $l$ , sowie dem Stichprobenumfang  $n_l$ . Die Zahl der Wiederholungen wird im Wesentlichen durch die zur Verfügung stehenden Rechenkapazitäten limitiert. In der in Abschnitt 4 beschriebenen Anwendung wird mit 10000 Wiederholungen gerechnet, was zu

sehr stabilen Ergebnissen führt. Die zu Beginn willkürlich getroffene Wahl des Umfangs  $n_1$  kann dagegen in einem weiteren, fünften Schritt optimiert werden. Dazu ist der Quotient

$$R(n_1) = \frac{(Q(n_1, k_{1,0}^*))^2}{Q(n_2, k_{2,0}^*)} \quad (25)$$

zu berechnen und bezüglich  $n_1$  numerisch zu minimieren. Stimmt  $n_1^* = \operatorname{argmin} R(n_1)$  nicht mit dem im ersten Schritt gewählten Stichprobenumfang  $n_1$  überein, müssen die Schritte 1 – 4 nochmals durchlaufen werden.

Um auch Aussagen über Quantile treffen zu können, die im Innern der Verteilung und nicht in ihrem Extrembereich, d.h. links von  $X_{k+1}$  liegen, schlagen DANIELSSON und DE VRIES (2000) vor, den mittels Hill-Estimator geschätzten Randbereich der Verteilung  $F$  an der Stelle  $X_{k+1}$  mit der empirischen Verteilungsfunktion zu verknüpfen. Dadurch werden die jeweiligen Vorteile der EVT und der HS kombiniert.

## 4 Anwendung „Tierproduktion“

### 4.1 Modell und Daten

In Anlehnung an MANFREDO und LEUTHOLD (1999), die die Marktrisiken in der US-amerikanischen Bullenmast mit Hilfe von VaR untersuchen, soll dieses Konzept nun herangezogen werden, um das Marktrisiko in der Schweineproduktion für europäische Marktverhältnisse zu quantifizieren. Ziel ist die Bestimmung des VaR für einen Zeithorizont von 12 Wochen. Dabei werden drei Sichtweisen eingenommen: Erstens, die eines Ferkelproduzenten, zweitens, die eines Verbundbetriebes, der selbsterzeugte Ferkel mästet und drittens, die eines spezialisierten Schweinemästers, der Ferkel zukaufte. Ferkel und Schweine werden nicht über Vertragsproduktion zu vorab definierten Preisen, sondern zu aktuellen Marktpreisen gekauft bzw. verkauft. Der Geldüberschuss (Veredlungsmarge)  $CF_t$  zu einem Zeitpunkt  $t$  bezogen auf ein Ferkel bzw. Schwein lautet

$$CF_t = a \cdot P_t - \sum_{i=1}^K b_i Z_t \quad (26)$$

und kann dann wie ein Portfolio betrachtet werden, das sich aus einer Long-Position (dem Produktpreis  $P$ ) und mehreren Short-Positionen (den Faktorpreisen  $Z_i$ ) zusammensetzt. Damit lässt sich (7) unmittelbar übertragen, wobei die Portfoliogewichte  $a$  und  $b_i$  die Bedeutung von produktionstechnischen Koeffizienten (Schlachtgewicht, Futtermittelverbrauch etc.) haben. Empirische Untersuchungen von ODENING und MUBHOFF (2002) zeigen, dass das Marktrisiko in der Schweineproduktion fast ausschließlich durch die Ferkel- und Schweinepreise hervorgerufen wird. Andere Aufwandspositionen, wie z.B. Futterkosten, beeinflussen zwar das Niveau der Produktionsmarge, unterliegen in Deutschland aber nur geringen Schwankungen. Für die Berechnung des VaR spielen sie daher praktisch keine Rolle. Aus diesem Grund wird im Folgenden das VaR vereinfachend für drei Zeitreihen ausgewiesen: Für die Erzeugerpreise von Ferkeln (Sichtweise des Ferkelerzeugers), für die Erzeugerpreise für Schlachtschweine (Sichtweise des Verbundbetriebes) und die Differenz aus Erlösen und Ferkelpreisen (Sichtweise des spezialisierten Mastbetriebes), wobei ein Schlachtgewicht von 80 kg angenommen wird. Es ist hervorzuheben, dass es sich hier nicht um eine Anwendung des VaR-Konzeptes im engeren Sinne handelt, sondern vielmehr ein Cash-Flow-at-Risk (CFaR)<sup>8</sup> berechnet wird (DOWD 1998, S. 239 f.). Trotz der formalen Analogie ist auf Unterschiede in der Interpretation beider Größen hinzuweisen: Während VaR den Wertverlust einer Vermögensposition quantifiziert, bezieht sich CFaR auf eine Stromgröße, eben den Cash Flow. Der informativste Wert des CFaR dürfte daher vor allem für eine risikoorientierte mittelfristige Finanzplanung gegeben sein.

Die Preiszeitreihen wurden von der Zentralen Markt und Preisberichtsstelle Berlin (ZMP) zur Verfügung gestellt. Es handelt sich um wöchentliche Notierungen im Zeitraum von Januar 1994 bis Oktober 2001 für die fünf neuen Bundesländer. Die Ferkelpreise in Euro je kg Lebendgewicht beziehen sich auf Ringferkel von handelsüblicher Qualität. Bei den Schweinepreisen wurde ein Durchschnittspreis in Euro je kg Schlachtgewicht über die Handelsklassen E bis P gebildet. Eine Darstellung der Originalreihen findet sich im Anhang (Abb. A1).

## 4.2 Empirische Ergebnisse

Entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 2.2 ist zunächst zu klären, welche Verteilungen der Marktfaktoren der Berechnung des VaR zugrunde zu legen sind. Dabei geht es erstens um die Frage „bedingt oder unbedingt“ und zweitens um die Entscheidung „fat tailed oder thin tailed“. Beide Aspekte werden im Folgenden nacheinander untersucht. Gegenstand der Be-

---

<sup>8</sup> Dessen ungeachtet wird bei der Diskussion der Ergebnisse im Folgenden weiter von VaR (im weiteren Sinne)

trachtung sind nicht die Preiszeitreihen selbst, sondern die wöchentlichen Veränderungen der Preise<sup>9</sup>. Zur Beantwortung der erstgenannten Frage wird ein Lagrange-Multiplier-Test auf Vorliegen von GARCH-Effekten, d.h. auf bedingte Heteroskedastizität durchgeführt (GREENE 2000, S. 808). Dieser Test zeigt an, dass die Nullhypothese der Homoskedastizität sowohl bei den Schweinepreisen als auch bei der Veredlungsmarge abzulehnen ist. Im Anschluss wird daraufhin jeweils ein GARCH(1,1) Modell für die wöchentlichen Differenzen der Ferkelpreise, der Schweinepreise und der Veredlungsmarge in der Schweinemast geschätzt<sup>10</sup>. Die Schätzwerte sind in Tabelle 1 zusammengefasst.

**Tabelle 1: Parameter der GARCH (1,1)-Modelle (t-Werte in Klammern)**

Parameter	Ferkel	Schwein	Marge
<b>w</b>	0,000875** (5,71)	0,000727** (3,79)	0,862557* (1,81)
<b>d</b>	0,710047** (6,24)	0,443897** (4,22)	0,164101** (4,24)
<b>b</b>	0,172849** (4,26)	0,276940** (2,34)	0,762881** (12,21)

\* Signifikanzniveau 95%    \*\* Signifikanzniveau 99%

Es zeigt sich, dass die geschätzten Parameter signifikant bzw. hoch signifikant sind. Die standardisierten Residuen  $\hat{e}_t / s_t$  weisen auf einem 1% Signifikanzniveau keine Autokorrelationen mehr auf. Mit Ausnahme der Schätzung für die Ferkelpreisreihe trifft dies auch für die Quadrate der standardisierten Residuen zu. Somit erscheint die Einbeziehung weiterer Lags in das GARCH-Modell nicht notwendig.

Im nächsten Schritt werden die Ein-Wochen-Prognosen der Volatilitäten, die mit den soeben geschätzten Modellen erstellt werden können, auf einen 12-Wochen-Zeitraum hochgerechnet: Dies erfolgt einerseits mit Hilfe der Square-Root-Regel (6) und andererseits mit Hilfe der Drost-Nijman-Formel (7). Das Ergebnis für die Schweinepreise ist in Abb. 1 dargestellt. Die Prognose der Volatilitäten für die Ferkelpreise als auch die Veredlungsmarge führt zu ähnlichen Ergebnissen (siehe Abb. A2 im Anhang).

---

gesprochen.

<sup>9</sup> Üblicherweise werden in finanzwirtschaftlichen Anwendungen Renditen, gemessen als Differenzen logarithmierter Preise („log returns“), betrachtet (siehe (3)). Dies hat den Vorteil der Niveaunabhängigkeit, führt aber zu Problemen, wenn negative Werte auftreten, wie dies z.B. bei der Veredlungsmarge der Fall sein kann.

<sup>10</sup> Auf die Schätzung eines Bi-GARCH-Modells für die Ferkel- und Schweinepreise, aus denen dann unter Verwendung der Portfoliogewichte die Volatilität und das VaR der Veredlungsmarge abzuleiten ist, wird an dieser Stelle verzichtet. Statt dessen wird ein GARCH-Modell für die Veredlungsmarge selbst geschätzt. Dies entspricht der Vorgehensweise, die auch später für die EVT-Schätzung erfolgt, da dort nur univariate Verteilungen betrachtet werden.

Abbildung 1: Zeitliche Aggregation der Volatilität der GARCH-Modelle

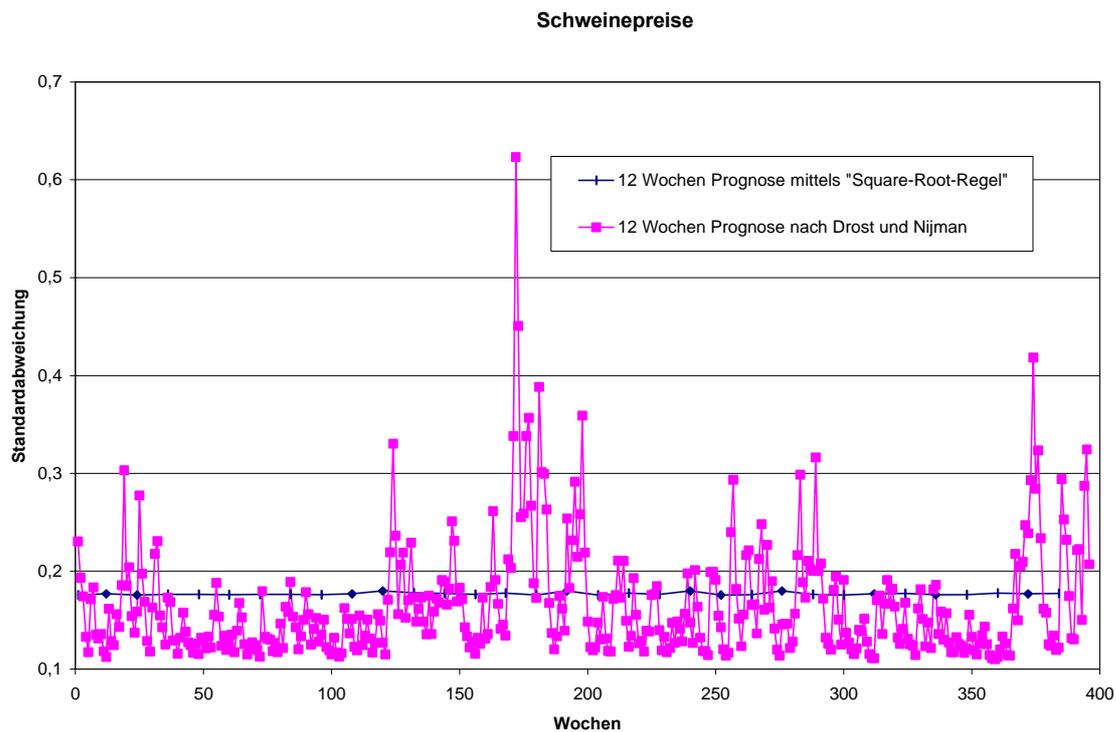


Abb. 1 bestätigt die theoretischen Vorüberlegungen in Abschnitt 2.4. Die Square-Root-Regel kann offensichtlich nicht als geeignete Approximation für eine korrekte Zeitaggregation der Volatilität in GARCH-Modellen betrachtet werden. Die Schwankungen der Volatilität sind tatsächlich wesentlich geringer, als durch Multiplikation mit dem Faktor  $\sqrt{12}$  ausgewiesen. Das bedeutet, dass die VaR-Prognosen, die sich dieser Vorgehensweise bedienen, permanent zu einer Über- und einer Unterschätzung des tatsächlichen 12-Wochen-VaRs führen. Die korrekt ermittelte Schwankung der 12-Wochen-Volatilität erscheint so gering, dass – der Argumentation von DANIELSSON und DE VRIES (2000) folgend – bei der nachfolgenden Anwendung der EVT von unbedingten Verteilungen ausgegangen wird, ungeachtet der Feststellung bedingter Heteroskedastizität bei wöchentlichen Veränderungen.

Es bleibt die Frage zu klären, ob die Differenzen der betrachteten Zeitreihen fat tailed sind oder nicht. Dieser Sachverhalt kann durch sog. QQ-Plots visualisiert werden, bei denen die Quantile der empirischen und einer theoretischen Verteilung gegenübergestellt werden. Liegen die Punkte annähernd auf einer Gerade, ist davon auszugehen, dass die beobachteten Daten der Referenzverteilung folgen. In der Abb. 2 wurde die Normalverteilung als Referenzverteilung gewählt.

**Abbildung 2: QQ-Plots für Ferkel, Schweine, Veredlungsmarge (1 Woche)**

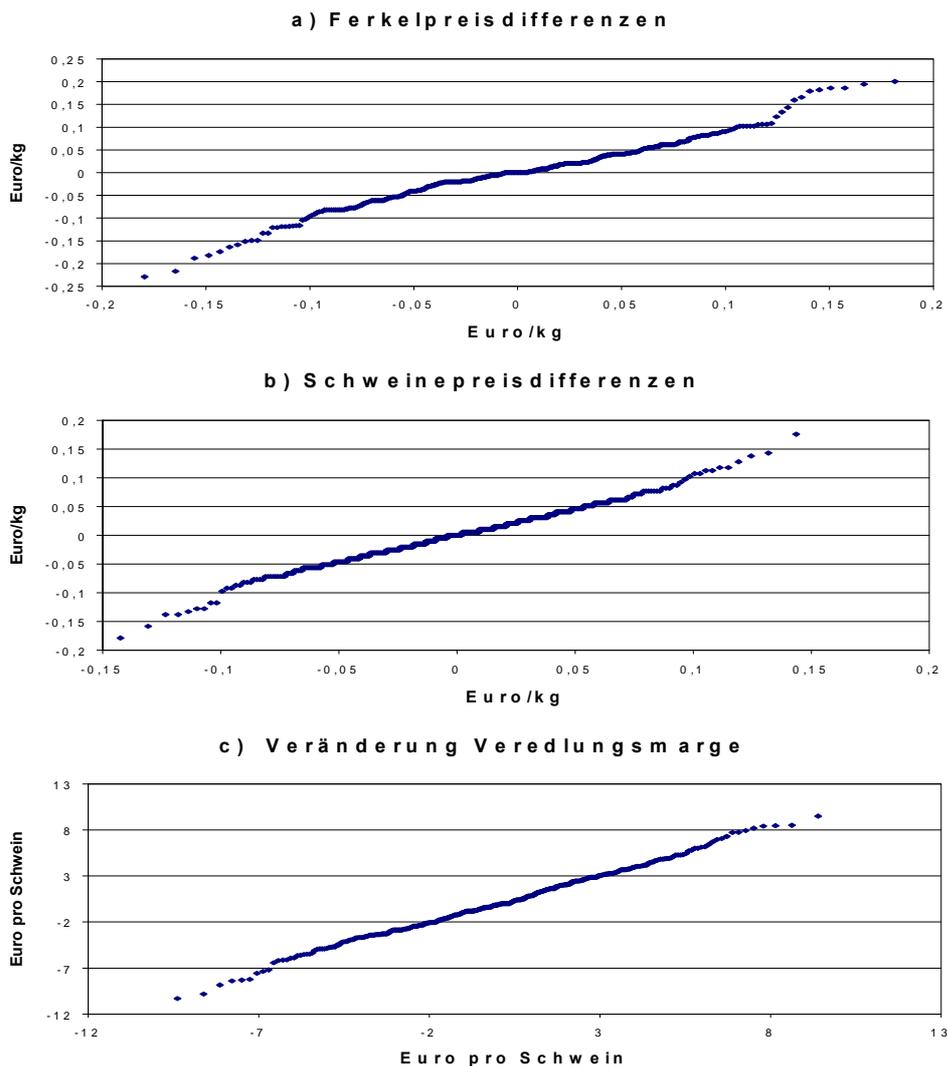


Abb. 2 lässt sich in der Weise deuten, dass die Veränderungen der Ferkelpreise und der Schweinepreise einen positiven Exzess aufweisen; für die Veredlungsmarge trifft diese Feststellung nicht eindeutig zu. Die Durchführung eines Kolmogorov-Smirnoff-Anpassungstests bestätigt den ersten visuellen Eindruck der QQ-Plots. Die Abweichung von der Normalverteilung ist bei den Veränderungen der Ferkelpreise am deutlichsten ausgeprägt. Die Annahme der Nullhypothese hinsichtlich Normalverteilung ist mit einem Signifikanzniveau von 5% für alle drei Verteilungen abzulehnen. Bei den Veränderungen der Ferkelpreise überschreitet der Prüfquotient mit 0,086 auch den kritischen Wert von 0,081 für das 1% Signifikanzniveau. Der Jarque-Bera-Test, der Abweichungen von der Normalverteilung in Bezug auf Schiefe und Wölbung zusammenfasst, bestätigt zusätzlich die Ablehnung dieser Verteilung für die drei betrachteten Zufallsvariablen. Der kritische Wert der Teststatistik beträgt auf dem 1% Signifikanzniveau 9,2 und wird durch die entsprechenden empirischen Werte der Ferkelpreise (55,4), der Schweinepreise (55,1) und der Marge (23,5) überschritten. Die Testergebnisse

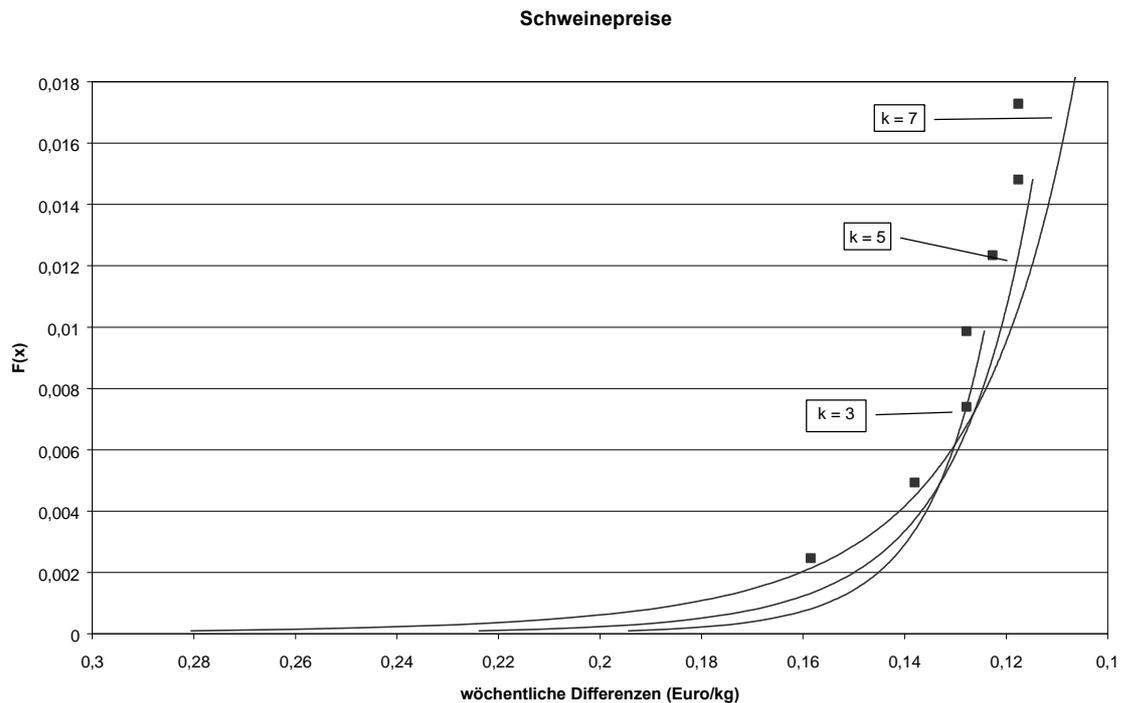
stützen die Hypothese des Vorhandenseins von "Fat Tails". Diesem Befund entsprechend soll im nächsten Schritt eine EVT-Schätzung durchgeführt werden.

Mit Blick auf die Veredlungsmarge, in die hier zwei stochastische Faktoren einfließen, stellt sich die Frage, wie die zur Schätzung univariater Verteilungen konzipierte EVT umzusetzen ist. Grundsätzlich bestehen zwei Vorgehensweisen zur Implementierung einer EVT-Schätzung für ein Portfolio, das Post Fitting und das Presampling (DANIELSSON & DE VRIES 2000). Bei der eindimensionalen Methode des Post Fittings wird entsprechend der Vorgehensweise der HS, unter Berücksichtigung der Gewichtung der einzelnen Portfoliokomponenten, mit den historischen Preisreihen ein Portfolio gebildet. Anschließend werden die Tails der Verteilung dieser Zufallsvariablen geschätzt. Beim Presampling wird für jede in das Portfolio eingehende Komponente eine Tailschätzung durchgeführt und nach Erstellen einer Kovarianzmatrix das Portfolio mit den in den Tails modifizierten Verteilungen der Preisreihen gebildet. Diese mehrdimensionale Methodik hat gegenüber dem Postfitting den Nachteil eines immens steigenden Rechenaufwandes bei umfangreichen Portfolios. Das Post Fitting basiert auf der Annahme konstanter Korrelationen zwischen den einzelnen Portfoliokomponenten über die Zeit, die bei der Veredlungsmarge gegeben ist und somit hier angewandt wird.

Um das in Abschnitt 3.2 beschriebene Bootstrap-Verfahren zur Bestimmung des Stichprobenanteils zur Tail-Index-Schätzung zu motivieren, werden zunächst am Beispiel der Schweinepreisdifferenzen die Ergebnisse des Hill-Estimators für verschiedene, willkürlich gewählte Werte von  $k$  in Abb. 3 vorgestellt. Es ist offensichtlich, wie stark die Schätzergebnisse von der Zahl der in die Schätzung einbezogenen Extremwerte abhängen. Den in Abb. 4 dargestellten Extremwertverteilungen liegt dagegen bereits die optimierte Anzahl von Extremwerten zugrunde. Sie beträgt für die Ferkelpreise 6, für die Schweinepreise 9 und für die Marge 3 Extremwerte. Zum Vergleich sind die mittels VKM und HS bestimmten empirischen Verteilungen abgebildet.

Die geschätzten Tail-Indices der Extremwertverteilungen für die 1-Wochen-Differenzen der Ferkelpreise bzw. der Schweinepreise lauten 5,37 bzw. 4,08. Auf Grund der positiven Korrelation der Veränderung der Schlachtschweine- und Ferkelpreise sind die Schwankungen der Veredlungsmarge weniger extrem als die der beiden Preisreihen selbst. Dies drückt sich in

Abbildung 3: Tailschätzungen für verschiedene Sample-Fractions (1 Woche)

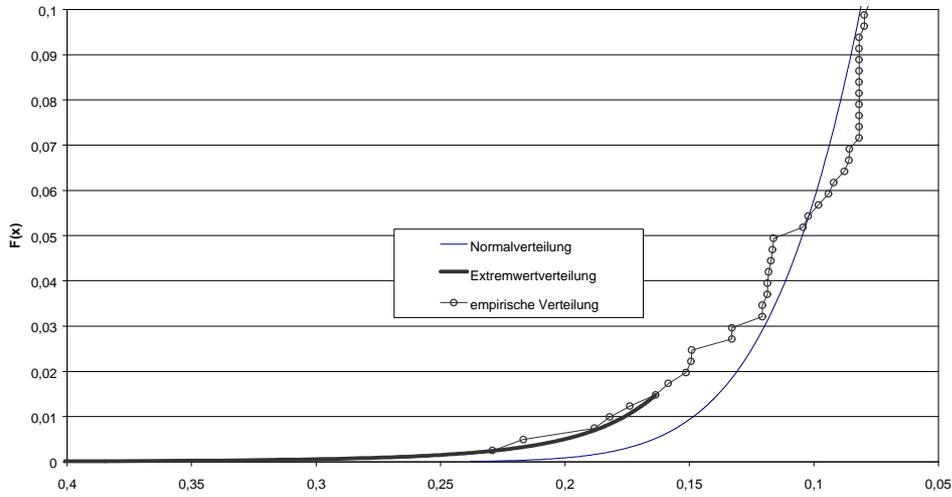


einem vergleichsweise großen Tail-Index von 7,23 aus und steht in Einklang mit den QQ-Plots und den Ergebnissen der Tests auf Normalverteilung, die für die Marge eine geringere Ausprägung von "Fat-Tails" angedeutet haben.

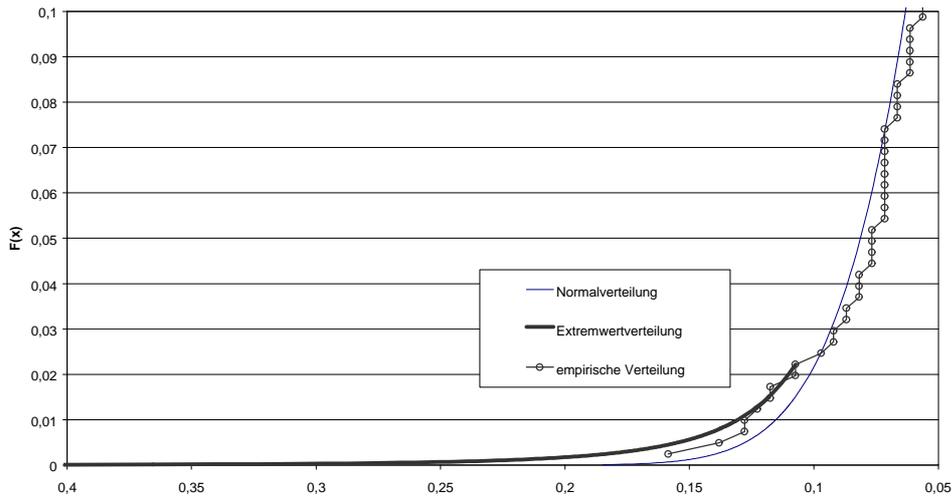
Um das angestrebte Ziel – die Bestimmung des 12-Wochen-VaRs – zu erreichen, werden die aus Abb. 4 abzuleitenden 1-Wochen-VaRs hochgerechnet. Für die mittels HS und VKM berechneten VaRs geschieht dies mit der Square-Root-Regel, d.h. durch Multiplikation mit dem Faktor 3,464. Die zu der Extremwertverteilung gehörigen Quantile werden dagegen mit der Alpha-Root-Regel, d.h. unter Verwendung des jeweiligen Tail-Indexes  $\alpha$ , hochgerechnet. Tab. 2 enthält die so ermittelten VaRs für verschiedene Konfidenzniveaus. Zur besseren Vergleichbarkeit wurden in Tab. 2 für die EVT-Schätzung auch für das Konfidenzniveau von 95% die Werte der Extremwertfunktion ausgewiesen, obwohl diese bereits „rechts“ von dem durch das Bootstrap-Verfahren bestimmten Grenzwertes  $X_{k+1}$  liegen und entsprechend dem o.a. Vorschlag von DANIELSSON und DE VRIES (2000) schon die Werte der HS verwendet werden sollten.

**Abbildung 4: Vergleich von Extremwertverteilung, Normalverteilung und empirische Verteilung**

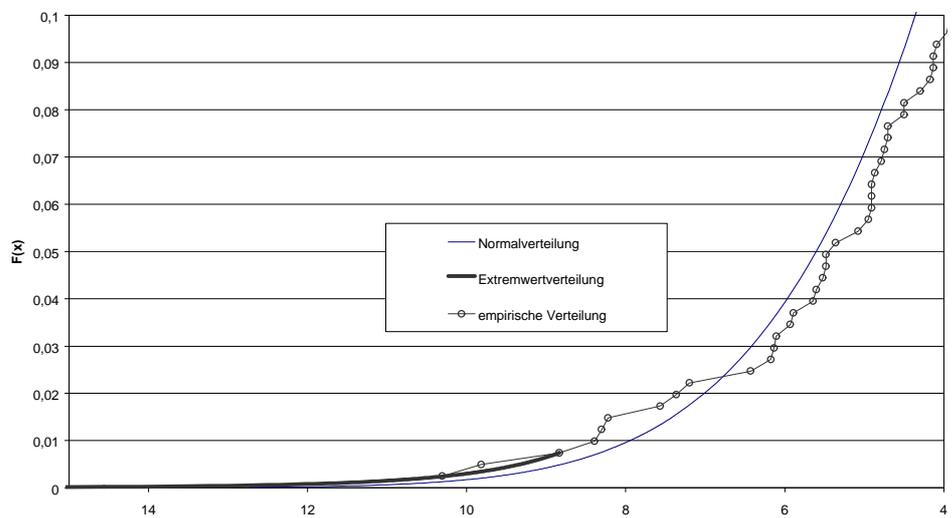
**a) wöchentliche Differenzen der Ferkelpreise (Euro/kg)**



**b) Wöchentliche Differenzen der Schweinepreise (Euro/kg)**



**c) Wöchentliche Differenzen der Veredlungsmarge (Euro/Schwein)**



**Tabelle 2: 1- und 12-Wochen-VaRs für die drei Zeitreihen und für verschiedene Konfidenzniveaus (95%, 99%, 99,9%).**

Konfidenz-niveau	Ferkelpreis			Schweinepreis			Marge		
	95,00%	99,00%	99,90%	95,00%	99,00%	99,90%	95,00%	99,00%	99,90%
	Euro			Euro			Euro		
<b>EVT</b>									
1 Woche	0,130	0,176	0,270	0,088	0,131	0,230	6,786	8,476	11,653
SE	0,012	0,005	0,085	0,006	0,009	0,058	1,034	0,203	1,862
12 Wochen	0,207	0,280	0,429	0,162	0,240	0,422	9,567	11,950	16,429
<b>HS</b>									
1 Woche	0,104	0,182	-	0,077	0,128	-	5,358	8,303	-
SE	0,439	1,001	-	0,877	0,995	-	0,366	0,501	-
12 Wochen	0,361	0,631	-	0,266	0,443	-	18,562	28,764	-
<b>VKM</b>									
1 Woche	0,105	0,148	0,197	0,081	0,115	0,153	5,607	7,947	10,571
SE	0,004	0,005	0,007	0,003	0,004	0,005	0,199	0,281	0,373
12 Wochen	0,362	0,514	0,684	0,282	0,400	0,532	19,422	27,531	36,620

Im Vergleich zur EVT weist die VKM für eine kurzfristige Ein-Wochen-Prognose eine Unterschätzung auf. Diese Unterschätzung durch die VKM nimmt mit einem steigenden Konfidenzniveau zu. Das Ein-Wochen-VaR der VKM für die Ferkelpreise (Schweinepreise und Marge) ist auf dem 99,9% Niveau mit 0,197 Euro (0,153 und 10,571), bei einem durchschnittlichen Preis von 1,938 Euro (1,399 und 73,192) deutlich geringer als das der EVT mit 0,27 Euro (0,230 und 11,653). Die zunehmende Unterschätzung ist durch die Annahme der Normalverteilung bei der VKM zu erklären, die, wie oben gesehen, im Widerspruch zu den beobachteten "Fat Tails" der Verteilungen steht.

Der Vergleich von HS und EVT zeigt für eine Wahrscheinlichkeit von 99% nur geringe Unterschiede, d.h. Verteilungsfunktionen der EVT und der HS schneiden sich in diesem Bereich (siehe Abb. 4). Für die Ferkelpreise ist das VaR der HS mit 0,182 Euro sogar höher als das der EVT mit 0,176 Euro. Für das 99,9% Niveau können die Quantile mit HS nicht bestimmt werden, da sie außerhalb der in den Preiszeitreihen enthaltenen extremen Preisschwankungen liegen. Dieser eingangs angesprochene Nachteil der HS wird hier offenkundig.

Im Gegensatz zur tendenziellen Unterschätzung beim Ein-Wochen-VaR, ist mittelfristig eine Überschätzung der VaRs bei der HS und der VKM im Vergleich zur EVT zu beobachten. Das mittels EVT bestimmte 95-Prozent-Quantil für die Ferkelpreise (Schweinepreise und Marge) ist mit 0,207 Euro (0,162 und 9,567) geringer gegenüber der VKM mit 0,362 Euro (0,282 und 19,422), als auch der HS mit 0,361 Euro (0,266 und 18,562). Die kurzfristige Unterschätzung

des VaRs durch die HS und die VKM wird, abhängig von der Länge des Prognosehorizonts, durch eine zu konservative Hochrechnung mit der Square-Root-Regel überkompensiert<sup>11</sup>.

In Bezug auf den (asymptotischen) Standardfehler (SE) der verschiedenen Schätzer ist Folgendes festzustellen<sup>12</sup>: Die VKM weist in Tab. 2 scheinbar den geringsten Schätzfehler auf. Dabei ist allerdings zu berücksichtigen, dass die Annahme der Normalverteilung als Bedingung für die hier vorgenommene Berechnung des SE der VKM nicht erfüllt ist. Der bereits angesprochene Nachteil der HS, der in relativ großen Schätzfehlern besteht, zeigt sich bei dem hier vorliegenden Stichprobenumfang von 405 Beobachtungen deutlich. Die EVT stellt diesbezüglich eine bessere Alternative dar.

Üblicherweise schließt sich an die VaR-Schätzung eine Validierung der Ergebnisse an. Dies geschieht meist in Form einer Quasi-Exante Prognose (Backtesting, Out-of-Sample-Prediction). Dazu wird der Beobachtungszeitraum in einen Schätzzeitraum und in einen Prognosezeitraum unterteilt. Durch Vergleich der theoretisch erwarteten und der tatsächlich beobachteten VaR-Überschreitungen im Prognosezeitraum kann die Plausibilität der verschiedenen Modelle getestet werden. Eine solche Validierung ist auf Grund des relativ kurzen Beobachtungszeitraums der Preisreihen in dieser Anwendung nicht möglich. So würde beispielsweise die Überschreitung eines 99%-VaR nur einmal während 100 Perioden auftreten; im vorliegenden Fall wären dies 100·12 Wochen, also alle 23 Jahre. Dies stellt eine grundsätzliche Schwierigkeit dar, wenn der traditionell kurzfristige Prognosehorizont des VaR-Konzeptes deutlich erweitert werden soll. Die Problematik wird dadurch verschärft, dass die EVT-Schätzung sehr datenaufwändig ist, so dass eine Validierung hier besonders schwer fällt.

## 5 Zusammenfassung und Schlussfolgerungen

Die in diesem Beitrag vorgenommene exemplarische Anwendung verdeutlicht zunächst, dass das Konzept der EVT grundsätzlich auf Problemstellungen im Agribusiness übertragbar ist, was im Grunde nicht überrascht. Es gilt nun zu bewerten, ob und wann eine solche Übertragung sinnvoll und notwendig erscheint. Dazu sind der zusätzliche Aufwand und der zusätzli-

---

<sup>11</sup> MC NEIL und FREY (2000) kritisieren die hier angewendete Hochrechnung mit  $h^{1/a}$  und favorisieren ein zweistufiges Verfahren, das in einer ersten Stufe bedingte Heteroskedastizität via GARCH-Schätzung berücksichtigt und in einer zweiten Stufe die EVT auf die Residuen des bedingten Schätzmodells anwendet.

<sup>12</sup> Der asymptotische Standardfehler für die VKM lautet:  $SE(\hat{x}_p) = s(2n)^{-1/2} c_p$  mit  $\hat{x}_p$  dem geschätzten p-Quantil und  $c_p$  dem p-Quantil der Standardnormalverteilung. Die Standardfehler für die HS wurden nach JORION (1998 S. 99) und die der EVT nach DANIELSSON und DE VRIES (1997) berechnet.

che Informationsgewinn im Vergleich zu konventionellen Verfahren der VaR-Schätzung einander gegenüberzustellen. In Bezug auf den Rechenaufwand ist festzuhalten, dass dieser im Vergleich zur Varianz-Kovarianz-Methode oder zur Historischen Simulation zunimmt. Dies liegt weniger an der Tail-Schätzung selber als vielmehr an dem Bootstrap-Verfahren zur Bestimmung des Stichprobenanteils, das sich als notwendig für die Schätzung erwiesen hat. Dabei ist allerdings zu berücksichtigen, dass die Häufigkeit, mit der diese Schätzung durchgeführt wird, deutlich geringer sein dürfte als bei kurzfristigen finanzwirtschaftlichen Anwendungen, die auf sich verschiebenden Zeitfenstern basieren und bei denen neue Preisinformationen ein permanentes Updaten der VaR-Prognosen erfordern.

Im Hinblick auf den Informationsgewinn durch Anwendung der EVT war in der vorliegenden Untersuchung drei Punkte zu erkennen:

1. Bei kurzfristiger Betrachtung wird das VaR im Fall leptokurtischer Verteilungen für extreme Wahrscheinlichkeiten durch die Varianz-Kovarianz-Methode aber auch durch die Historische Simulation unterschätzt.
2. Bei mittelfristiger Betrachtung fällt der Unterschied zwischen Square-Root-Regel und Alpha-Root-Regel besonders ins Gewicht und überwiegt den erstgenannten Effekt.
3. Gegenüber der Historischen Simulation kann die Schätzgenauigkeit (gemessen als Standardfehler) erhöht werden.

Die Belastbarkeit der ersten beiden Aussagen wird allerdings dadurch gemindert, dass wir unsere Ergebnisse nicht durch eine Quasi-Ex-ante-Prognose absichern können.

Um den Nutzen einer EVT-gestützten VaR-Prognose würdigen zu können, ist weiterhin nach der Notwendigkeit der Prognose extremer Ereignisse zu fragen, denn dort (und nur dort) liegen deren Vorzüge. Während in Finanzinstituten auf Grund des Basel-Akkords eine unmittelbare Verknüpfung zwischen VaR und der erforderlichen Mindesteigenkapitalausstattung hergestellt wird, sind derartige Implikationen für Unternehmen des Agribusiness nicht gegeben. Die Motivation liegt hier in der Identifikation von Situationen, die ruinöse Auswirkungen auf das Unternehmen haben können und in der Ableitung geeigneter Gegenmaßnahmen. In diesem Zusammenhang ist noch einmal auf den bereits angesprochenen Unterschied zwischen VaR und CFaR hinzuweisen. Um von einem hohen CFaR auf eine finanzielle Gefährdung des Unternehmens schließen zu können, muss zum einen das Ausgangsniveau berücksichtigt werden und zum anderen bekannt sein, wie lange der Cash Flow auf dem ausgewiesenen

niedrigen Niveau verharrt. Die Erfahrung zeigt, dass Ferkelerzeuger und Schweinemäster durchaus operative Verluste verkraften können, sofern diese Phase nicht zu lange andauert und vorher oder anschließend durch entsprechende Gewinne kompensiert wird. Die Einbeziehung dieser Informationen dürfte wesentlicher sein, als der Übergang von einem 99%-Quantil zu einem 99.9%-Quantil. Ein weiterer Einwand, der sich allerdings eher gegen VaR im Allgemeinen als gegen dessen Schätzung mittels EVT richtet, ist die Beschränkung auf Marktrisiken. Die extremen Risiken, die von MKS oder BSE für einen individuellen Produzenten ausgehen können, sind produktionstechnischer Natur und drücken sich nicht allein in aggregierten Marktpreisen aus.

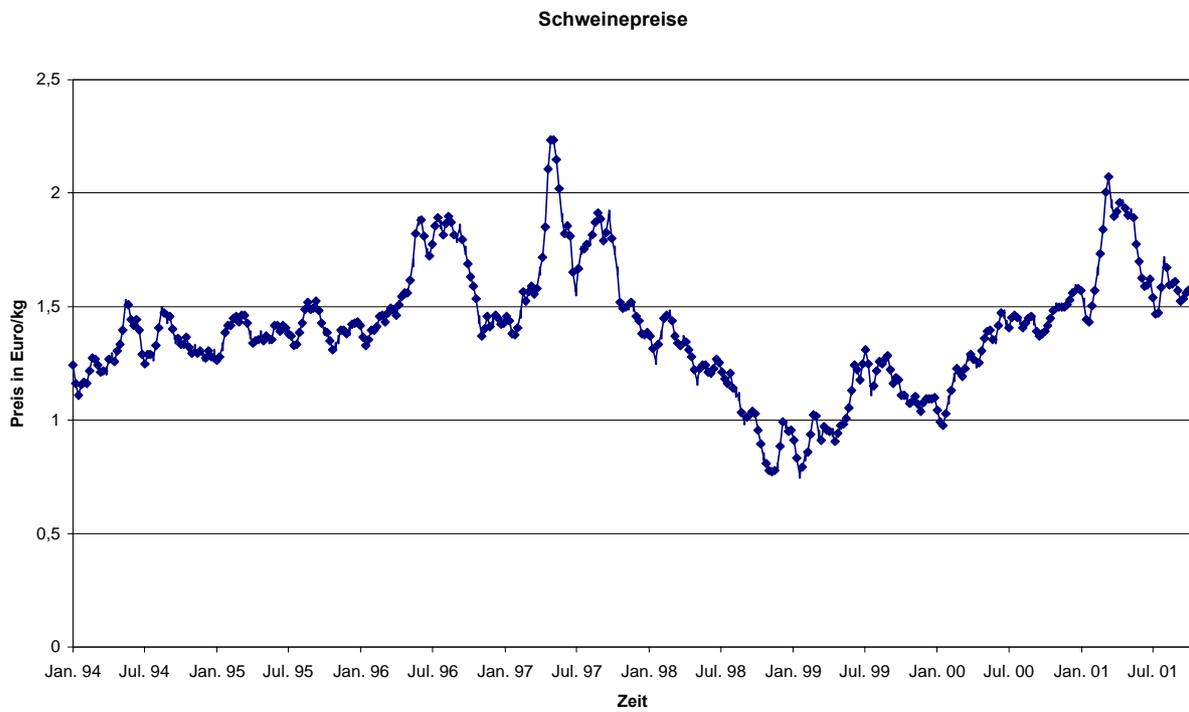
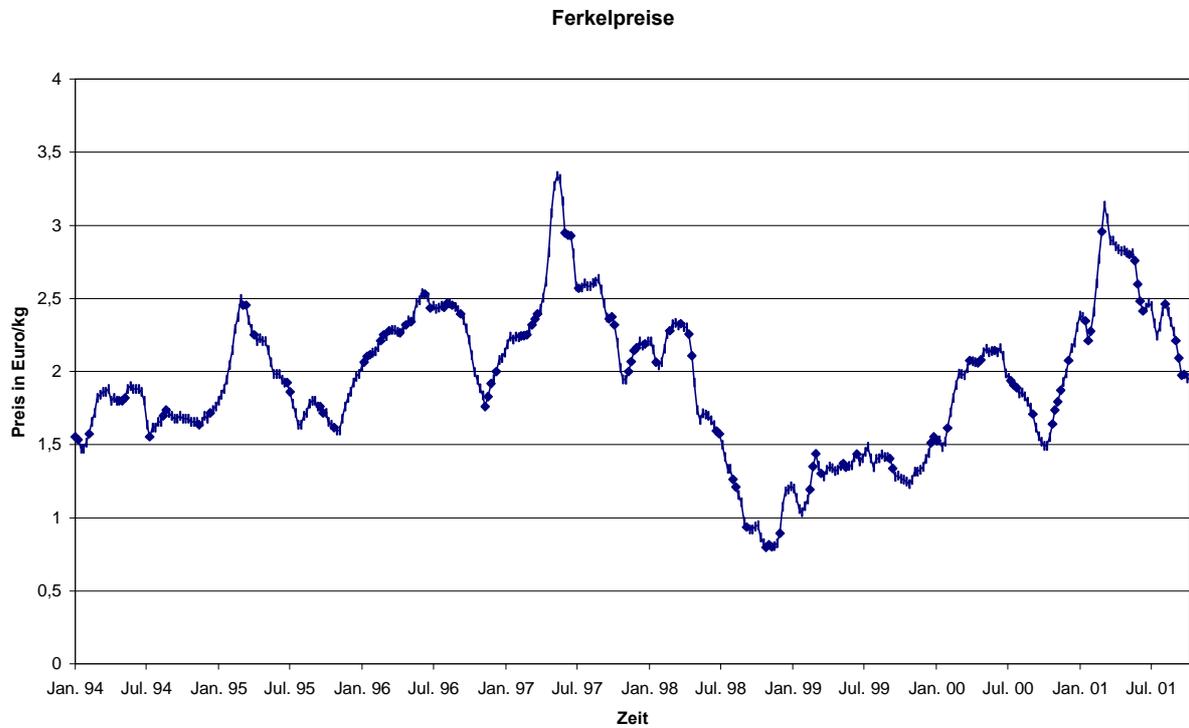
Damit lässt sich folgendes Fazit ziehen: Ob eine Ausweisung extremer Quantile notwendig erscheint, hängt von der Anwendungssituation ab. Hier unterscheidet sich die Sichtweise eines Schweinemästers oder Ferkelproduzenten von der eines Traders, der mit Terminkontrakten auf Schweine handelt oder von der eines Versicherungsunternehmens, das Tierseuchen versichert. *Wenn* eine Ausweisung extremer Quantile (z.B. 99% oder höher) wünschenswert erscheint, dann sollten diese im Fall leptokurtischer Verteilungen ergänzend mit EVT geschätzt werden. Der zusätzliche Rechenaufwand wird durch die höhere Schätzgenauigkeit im äußeren Rand der Verteilung sowie durch markante Unterschiede bei der zeitlichen Aggregation der VaR-Prognosen gerechtfertigt.

## 6 Literatur

- CHRISTOFFERSEN, P. F., DIEBOLD, F. X. (2000): How Relevant is Volatility Forecasting for Financial Risk Management? *Review of Economics and Statistics* 82: 1-11.
- DANIELSSON, J., DE VRIES, C. G. (1997): Beyond the Sample: Extreme Quantile and Probability Estimation. Working Paper, London School of Economics University of Iceland.
- DANIELSSON, J., DE VRIES, C. G. (2000): Value-at-Risk and Extreme Returns. *Annals d'Economie et de Statistique* 60: 239-269.
- DANIELSSON, J., HARTMANN, P., DE VRIES, C. G. (1998): The Cost of Conservatism. *Risk* 11: 101-103.
- DANIELSSON, J., DE HAAN, L., PENG, L., DE VRIES, C. G. (2001): Using a Bootstrap Method to Choose the Sample Fraction in Tail Index Estimation. *Journal of Multivariate Analysis* 76: 226-248.
- DIEBOLD, F.X. HICKMAN, A., INOUE, A., SCHUERMAN, T. (1997): Converting 1-Day Volatility to h-Day Volatility: Scaling by Root-h is Worse than You Think. Wharton Financial Institutions Center, Working Paper 97-34. Published in condensed form as "Scale Models", *Risk*, 11, 104-107 (1998).
- DIEBOLD, F., X., SCHUERMAN, T., STROUGHAIR, J. D. (1998): Pitfalls and Opportunities in the Use of Extreme Value Theory in Risk Management. Working Paper 98-10, The Wharton School, University of Pennsylvania.
- DIGGELMANN, P.B. (1999): Value at Risk. Kritische Betrachtung des Konzepts; Möglichkeiten der Übertragung auf den Nichtfinanzbereich. Versus, Zürich.
- DOWD, K. (1998): Beyond Value at Risk. Wiley, Chicester u.a.
- DROST, F. C., NIJMAN, T. E. (1993): Temporal Aggregation of GARCH Processes. *Econometrica*, 61, 909-927.
- EMBRECHTS, P., KLÜPPELBERG, C., MIKOSCH, T. (1997): Modeling Extremal Events for Insurance and Finance. Springer, Berlin.
- GREENE, W. H. (2000): *Econometric Analysis*, Fourth Edition. Prentice-Hall, New Jersey.
- JORION, P. (1997): Value at Risk – The New Benchmark for Controlling Market Risk. McGraw-Hill, New York.
- LI, D. X. (1999): Value at Risk based on the Volatility, Skewness and Kurtosis. Working Paper, Riskmetrics Group, New York.
- MANFREDO, M., R., LEUTHOLD, R., M. (1999): Market Risk Measurement and the Cattle Feeding Margin: An Application of Value-at-Risk. OFOR Paper no. 99-04, University of Illinois at Urbana-Champaign.
- MCNEIL, A., J. (1998): Calculating Quantile Risk Measures for Financial Return Series using Extreme Value Theory. Working Paper, Department Mathematik, ETH Zürich.
- MCNEIL, A., J., FREY, R. (2000): Estimation of Tail-Related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series: an Extreme Value Approach. *Journal of Empirical Finance* 7: 271-300.
- ODENING, M., MUBHOFF, O. (2002): Value-at-Risk – ein nützliches Instrument des Risikomanagements in Agrarbetrieben? In: Brockmeier, M. et al. (Hrsg.): Liberalisierung des Weltagrarhandels - Strategien und Konsequenzen. Schriften der Gesellschaft für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften des Landbaus, Band 37 (im Druck).
- WINSTON, W. (1998): *Financial Models using Simulation and Optimization*. Palisade, New York.
- YANG, S. R., BRORSEN, B. W. (1992): Nonlinear Dynamics of Daily Cash Prices. *American Journal of Agricultural Economics* 74: 706-715.

## 7 Anhang

Abbildung A 1 Preiszeitreihen



### Veredlungsmarge

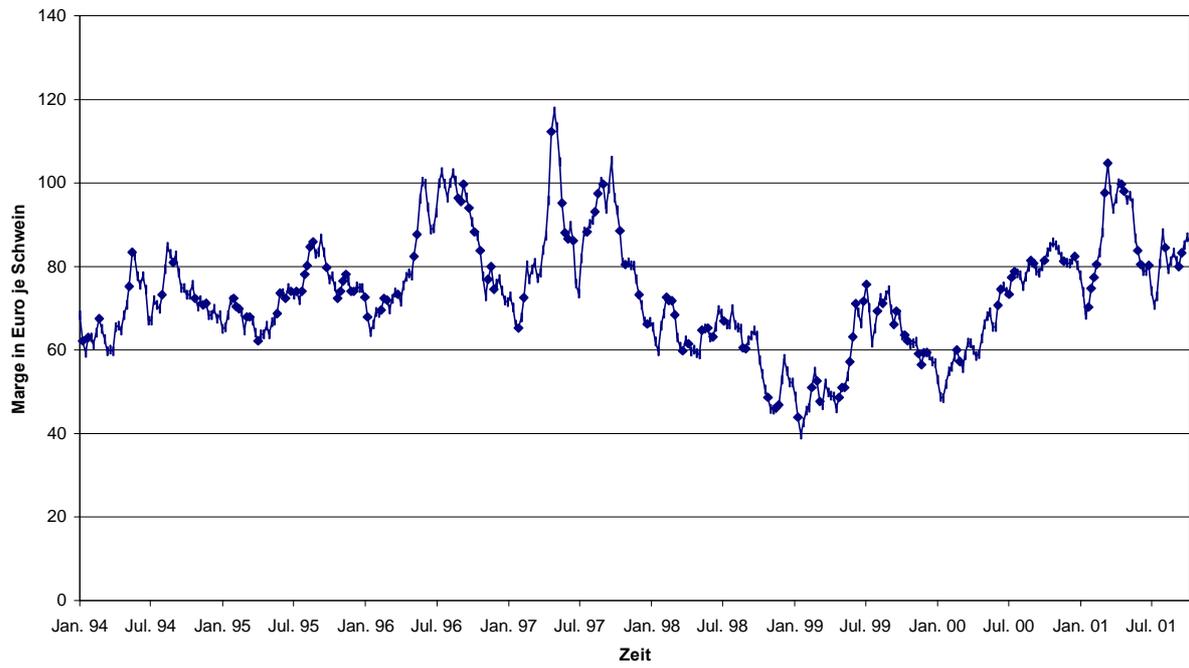


Abbildung A 2 zeitliche Aggregation der Volatilität der GARCH-Modelle

