3.6. Lineare Optimierung, Simplexmethode

Lineare Optimierung (auch LP): Anwendungsgebiet mit umfassender Theorie,

Das Land Brandenburg möchte die nachhaltige Landbewirtschaftung fördern und setzt hierfür ein Extensivierungsprogramm (EX) und ein Programm zur Förderung des ökologischen Landbaus (ÖKO) ein. Dem Extensivierungsprogramm wird ein Zielbeitrag von 3 in Bezug auf die nachhaltige Landbewirtschaftung beigemessen, dem Programm zur Förderung des ökologischen Landbaus ein Zielbeitrag von 5.
Für die Programme stehen 6 Mio. € zur Verfügung. Zur Umsetzung der Programme entsteht bei EX ein Verwaltungsaufwand von 1 Beamten pro 1 Mio. €, bei ÖKO von 2 Beamten pro 1 Mio. €, wobei insgesamt 7 Beamte zur Umsetzung der Programme zur Verfügung stehen. Schließlich verlangt die Umsetzung von EX einen zusätzlichen Arbeitsaufwand in landwirtschaftlichen Betrieben von 3 AK pro 1 Mio. € und die von ÖKO von 9 AK pro 1 Mio. €, wobei der zusätzliche Arbeitsaufwand insgesamt 27 AK nicht übersteigen sollte.
In welchem Umfang sollten EX und ÖKO gefördert werden?

Variablen: x1 Mio. € für ÖKO
x2 Mio. € für EX.

Die math. Modellierung führt zu folgendem linearen Optimierungsproblem:

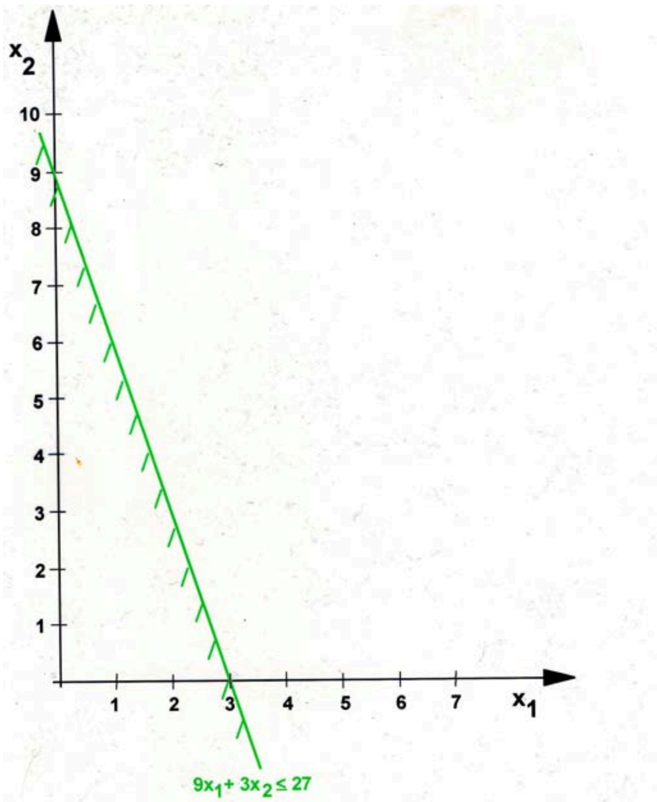
$$\max\left\{ 5x_1 + 3x_2 \;\middle|\; \begin{array}{r} 9x_1 + 3x_2 \le 27 \\ 2x_1 + x_2 \le 7 \\ x_1 + x_2 \le 6 \end{array} ,\, x_1 \ge 0,\; x_2 \ge 0 \right\}$$

Zielfunktion, Nebenbedingungen (Restriktionen),

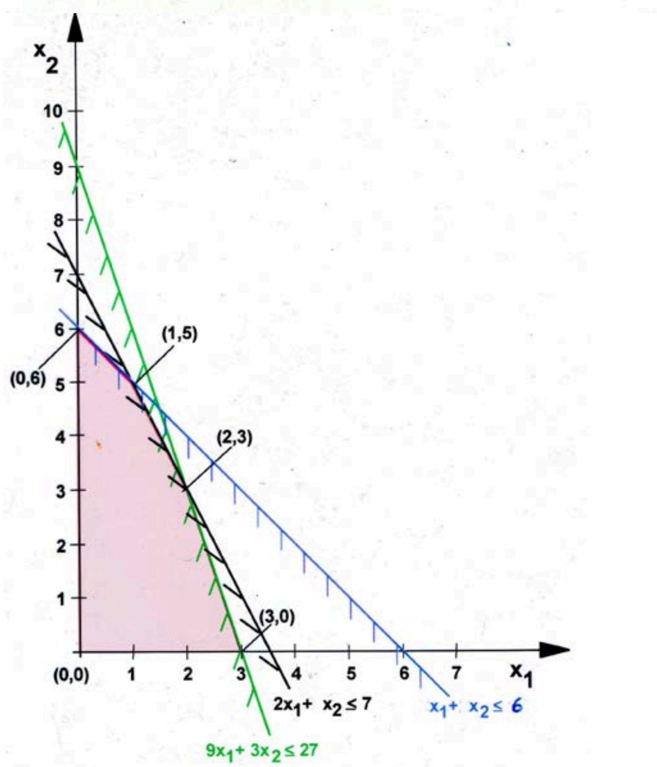
- bei 2 Variablen ist eine geometrische Darstellung und Lösung des Problems möglich,
- aber die geometr. Lösung ist ungenau und nur beschränkt (2 Variablen) anwendbar

Geometrische Lösung

Erste Halbebene

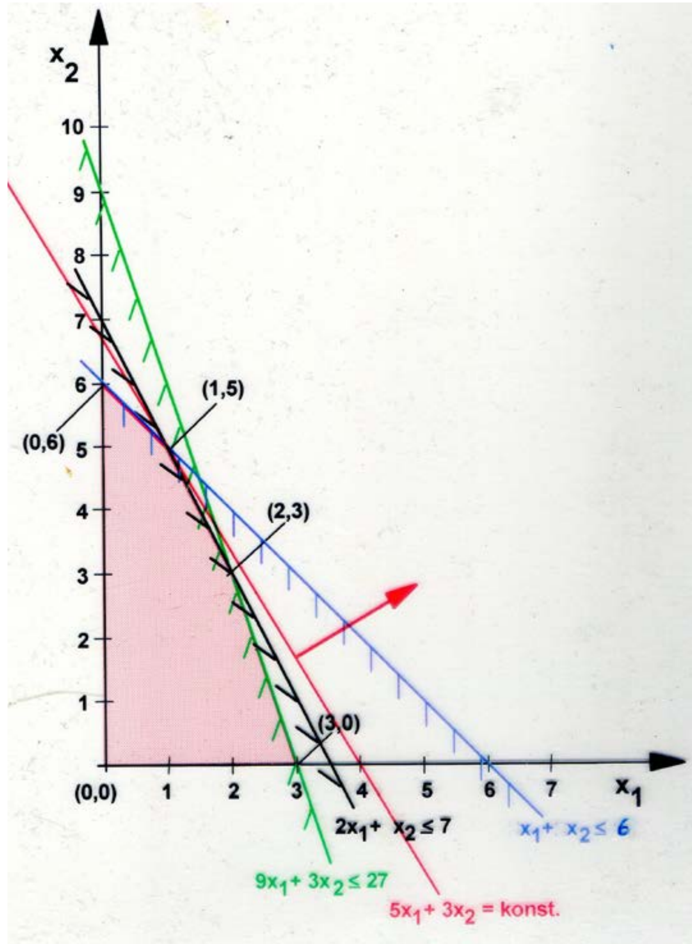


Menge der zulässigen Lösungen



Optimale Lösung im Punkt (1, 5) als

Berührungspunkt (bei der Parallel-verschiebung) der Zielfunktion mit der Menge der zulässigen Lösungen



Es gibt die rechnerische Methode: Simplexmethode (G. B. Dantzig, 1948/49), dazu überführen wir die 3 Ungleichungen durch Einführung von Schlupfvariablen x_3, x_4, x_5 (alle $\geq$ 0) in Gleichungen:

$$9x_1 + 3x_2 + x_3 = 27$$
$$2x_1 + x_2 + x_4 = 7$$
$$x_1 + x_2 + x_5 = 6$$

, $ZF: 5x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$,

Auflösung nach Schlupfvar.:

$$x_3 = 27 - (9x_1 + 3x_2)$$
$$x_4 = 7 - (2x_1 + x_2)$$
$$x_5 = 6 - (x_1 + x_2)$$

Basisvariablen (BV): x_3, x_4, x_5

Nichtbasisvariablen (NBV): x_1, x_2

kommen zu folgender <u>Simplextabelle:</u>

Wir kommen ähnlich wie bei den BT zu einer neuen Simplex-Tabelle. Das ZE ist aber so zu wählen, daß die ZF besser wird:

			5	3
			x_1	x_2
0	x_3	27	9	3
0	x_4	7	2	1
0	x_5	6	1	1
		0	-5	-3

BV: $x_3 = 27$, $x_4 = 7$, $x_5 = 6$

NBV: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$

Regeln:

Austauschspalte: min {-5, -3 } = -5
(siehe letzte Zeile: *Charakteristische Zeile*)
Ist der so bestimmte Wert ≥ 0 , so ist der zugehörige Vektor eine optimale Lösung.

Austauschzeile:

$$\min\left\{\frac{27}{9},\frac{7}{2},\frac{6}{1}\right\} = \frac{27}{9}$$

Bei der Minimumbildung werden nur die Brüche mit positivem Nenner betrachtet.
Sind alle Werte der Austauschspalte negativ, so existiert keine optimale Lösung.

			0	3
			x_3	x_2
5	x_1	3	1/9	1/3
0	x_4	1	-2/9	1/3
0	x_5	3	-1/9	2/3
		15	5/9	-4/3

BV: $x_1 = 3$, $x_4 = 1$, $x_5 = 3$

NBV: $x_3 = 0$, $x_2 = 0$

AS: $\min\left\{\frac{5}{9},\frac{-4}{3}\right\} = \frac{-4}{3}$

AZ: $\min\left\{\frac{3}{\frac{1}{3}},\frac{1}{\frac{1}{3}},\frac{3}{\frac{2}{3}}\right\} = \frac{1}{\frac{1}{3}}$

			0	0
			x_3	x_4
5	x_1	2	1/3	-1
3	x_2	3	-2/3	3
0	x_5	1	1/3	-2
		19	-1/3	4

BV: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_5 = 1$

NBV: $x_3 = 0$, $x_4 = 0$

AS: $\min\left\{\frac{-1}{3},4\right\} = \frac{-1}{3}$

AZ: $\min\left\{\frac{2}{\frac{1}{3}},\frac{1}{\frac{1}{3}}\right\} = \frac{1}{\frac{1}{3}}$

			0	0
			x_5	x_4
5	x_1	1	-1	1
3	x_2	5	2	-1
0	x_3	3	3	-6
		20	1	2

BV: $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $x_3 = 3$ (nicht benötigte AK)

NBV: $x_5 = 0$, $x_4 = 0$

$$\min\{1,2\} = 1 \geq 0$$

$\Rightarrow$ Wir haben eine optimale Lösung erhalten!

Lineares Optimierungsproblem:

Maximierung oder Minimierung einer linearen Funktion unter den Nebenbedingungen eines Systems von linearen Gleichungen und Ungleichungen (≤ oder ≥) und nichtnegativen Variablen.

max $\left\{ \underline{c}^T \underline{x} \middle| \underline{x} \epsilon B \right\}$

$$B = \left\{ \underline{x} \epsilon R^n \middle| \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ , \quad i \epsilon GL \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \ , \quad i \epsilon K \ , \quad \underline{x} \geq \underline{0} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \ , \quad i \epsilon G \end{array} \right\}$$

GL , K , G sind Indexmengen

B ist ein konvexes Polyeder: Durchschnitt endlich vieler abgeschlossener Halbräume.

Es gilt:

min $\left\{ \underline{c}^T \underline{x} \middle| \underline{x} \epsilon B \right\}$ = - max$\left\{ -\underline{c}^T \underline{x} \middle| \underline{x} \epsilon B \right\}$, das heißt ein lineares Minimierungsproblem kann so auf ein Maximierungsproblem zurückgeführt werden.

(1) $B \neq \emptyset$ es gibt

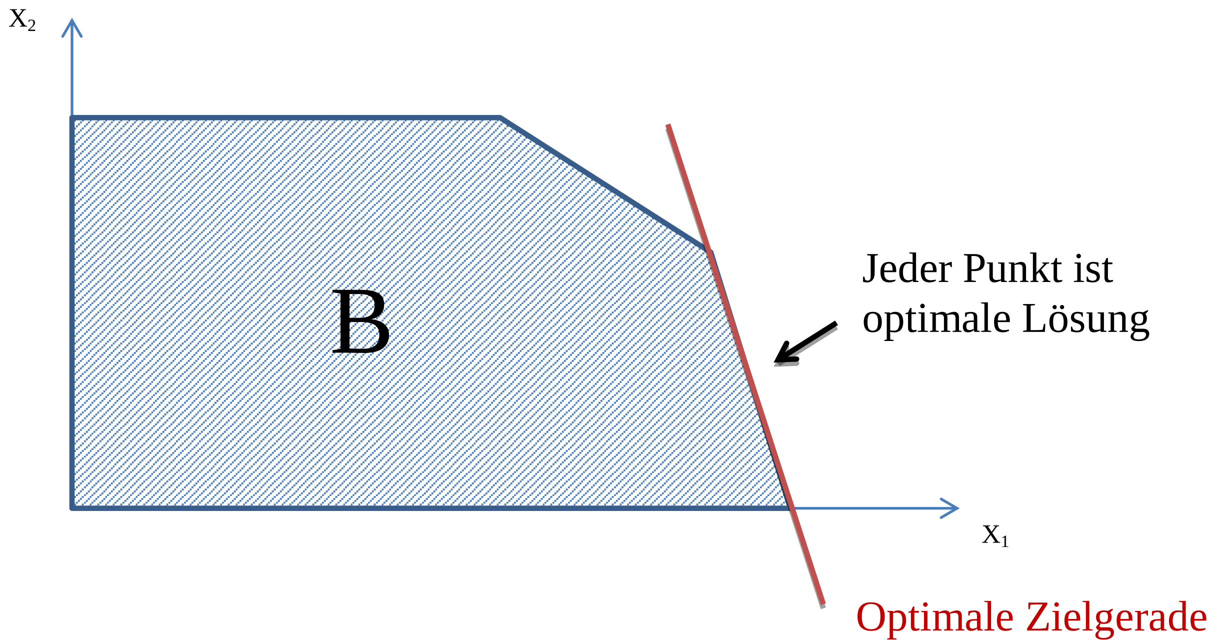
a) genau eine optimale Lösung (ein Eckpunkt des konvexen Polyeders B), so wie im letzten Beispiel,

b) unendlich viele optimale Lösungen(ein Kante oder Seite des konvexen Polyeders B),

c) keine optimale Lösung.

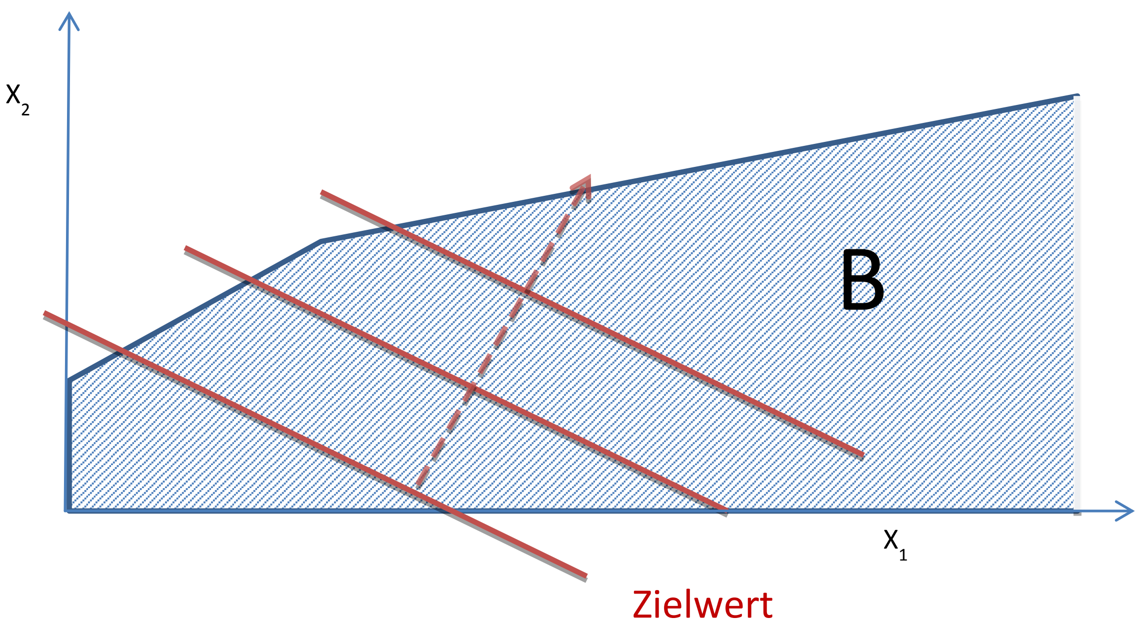
(2) $B = \emptyset$

b)



x_2
B
Jeder Punkt ist optimale Lösung
x_1
Optimale Zielgerade

c)



x_2
B
x_1
Zielwert

(2) $B = \emptyset$ Zum Beispiel: drei nicht überlappende Halbebenen.