

3.4 Lineare Gleichungssysteme

Definition: Ein System,

$$\begin{array}{rcccccc} \mathbf{a}_{11} \mathbf{x}_1 & + & \mathbf{a}_{12} \mathbf{x}_2 & + & \dots & + & \mathbf{a}_{1n} \mathbf{x}_n & = & \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21} \mathbf{x}_1 & + & \mathbf{a}_{22} \mathbf{x}_2 & + & \dots & + & \mathbf{a}_{2n} \mathbf{x}_n & = & \mathbf{b}_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots & & \\ \mathbf{a}_{m1} \mathbf{x}_1 & + & \mathbf{a}_{m2} \mathbf{x}_2 & + & \dots & + & \mathbf{a}_{mn} \mathbf{x}_n & = & \mathbf{b}_m \end{array}$$

mit den Konstanten

a_{ij} für $i = 1, 2, \dots, m$ und $j = 1, 2, \dots, n$,

b_i für $i = 1, 2, \dots, m$

und den Variablen

x_j für $j = 1, 2, \dots, n$ heißt

**Lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen
und n Variablen.**

Sind alle b_i für $i = 1, 2, \dots, m$ gleich 0, so heißt das
LGS **homogen**, ansonsten **inhomogen**.

Vektordarstellung:

$$\underline{a}_1 x_1 + \underline{a}_2 x_2 + \dots + \underline{a}_n x_n = \underline{b}$$

$$\text{mit } \underline{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}, \text{ für } i = 1, 2, \dots, n \text{ und } \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Matrixdarstellung:

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$$

$$\text{mit } \underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Begriff der Lösung eines LGS:

Definition: Ein Vektor $x = \hat{x}$, der die Bedingung $\underline{A} \hat{x} = \underline{b}$ erfüllt (in eine Identität überführt), heißt **Lösung** des LGS $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$.

Beispiel:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ -3x_1 + \frac{1}{2}x_3 &= 10 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Lösung des LGS mit elementarer BT:

	<u>a</u> ₁	<u>a</u> ₂	<u>a</u> ₃	<u>b</u>
<u>e</u> ₁	2	1	-1	5
<u>e</u> ₂	-3	0	1/2	10
<u>e</u> ₃	0	1	-1	0

	<u>a</u> ₁	<u>e</u> ₁	<u>a</u> ₃	<u>b</u>
<u>a</u> ₂	2	1	-1	5
<u>e</u> ₂	-3	0	1/2	10
<u>e</u> ₃	-2	-1	0	-5

	<u>a</u> ₁	<u>e</u> ₁	<u>e</u> ₂	<u>b</u>
<u>a</u> ₂	-4	1	2	25
<u>a</u> ₃	-6	0	2	20
<u>e</u> ₃	-2	-1	0	-5

	<u>e</u> ₃	<u>e</u> ₁	<u>e</u> ₂	<u>b</u>
<u>a</u> ₂	-2	3	2	35
<u>a</u> ₃	-3	3	2	35
<u>a</u> ₁	-1/2	1/2	0	5/2

$$\underline{b} = \underline{a}_1 \cdot \frac{5}{2} + \underline{a}_2 \cdot 35 + \underline{a}_3 \cdot 35$$

$\begin{array}{ccc} | & | & | \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{array}$

Lösung des LGS: $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 35 \\ 35 \end{pmatrix}$

(Probe!)

Zwei Fragen:

- a) Lösbarkeit: Gibt es eine Lösung des LGS?
- b) Eindeutigkeit: Wie viele Lösungen hat das LGS?

Satz: Ein LGS $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$ ist genau dann lösbar, wenn $\rho(\underline{A}) = \rho(\underline{A}, \underline{b})$ gilt.

$\underline{A}, \underline{b}$ heißt erweiterte Koeffizientenmatrix.

Im Beispiel oben ist $\rho(\underline{A}) = 3 = \rho(\underline{A}, \underline{b})$.

Satz: Gegeben sei ein LGS $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$ mit n Variablen (d.h. $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$). Das LGS besitzt **genau eine Lösung** dann und nur dann, wenn $\rho(\underline{A}) = n$ ist.

Gilt dagegen $\rho(\underline{A}) = \rho(\underline{A}, \underline{b}) = r < n$, dann sind $f = n - r$ Variablen frei wählbar, d.h. es existieren unendlich viele Lösungen.

f heißt Freiheitsgrad des LGS.

Beispiele:

1) obige Aufgabe: $\rho(\underline{A}) = 3 = n$

2) $3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 5$

LGS besteht aus einer Gleichung mit vier Variablen.

$$\rho(\underline{A}) = \rho(\underline{A}, \underline{b}) = 1, \quad n = 4, \quad f = 3;$$

$$x_4 = 5 - 3x_1 + x_2 - 2x_3, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

$$3) \quad 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -1$$

LGS besteht aus zwei Gleichungen mit vier Variablen.

Lösung des LGS mit elementarer BT:

	\downarrow	<u>a</u> ₁	<u>a</u> ₂	<u>a</u> ₃	<u>a</u> ₄	<u>b</u>
\leftarrow <u>e</u> ₁	2	2	2	0	1	
<u>e</u> ₂	1	-4	3	-2	-1	

	<u>e</u> ₁	<u>a</u> ₂	<u>a</u> ₃	\downarrow	<u>a</u> ₄	<u>b</u>
<u>a</u> ₁	1/2	1	1	0	1/2	
\leftarrow <u>e</u> ₂	-1/2	-5	2	-2	-3/2	

	<u>e</u> ₁	<u>a</u> ₂	<u>a</u> ₃	<u>e</u> ₂	<u>b</u>
<u>a</u> ₁	1/2	1	1	0	1/2
<u>a</u> ₄	1/4	5/2	-1	-1/2	3/4

Allgemeine Lösung:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5/2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad x_2, x_3 \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

|
Basisvariablen (BV)

|
Nichtbasisvariablen (NBV)

Spezielle Lösungen erhalten wir durch Fixierung der frei wählbaren Variablen:

$$\begin{array}{l} \text{a) } x_2 = 1 \\ \quad x_3 = 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = -\frac{3}{2} \\ x_4 = -\frac{3}{4} \end{array} \quad \text{also } \underline{x} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \\ 1 \\ -3/4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{b) } x_2 = 0 \\ \quad x_3 = 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_4 = \frac{7}{4} \end{array} \quad \text{also } \underline{x} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 7/4 \end{pmatrix}$$