3.3 Basis eines Vektorraumes, elementare Basistransformation

Beispiele für n linear unabhängige Vektoren in R^n:

$$\mathbf{R^2}: \quad \underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$$

$$\mathbf{R^n}: \quad \underline{e}_1, ..., \underline{e}_n$$

Definition: Eine Menge von n linear unabhängiger Vektoren im n-dimensionalen Vektorraum R^n heißt **Basis** des Vektorraumes R^n.

- Die Menge der Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ **und** $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist keine Basis.
- $B = \{\underline{b}_1, ..., \underline{b}_n\}$ Basis $\Rightarrow$ Bildung aller LK $\Rightarrow$ $\mathbf{R^n}$
- ist $\underline{c} \in \mathbf{R^n}$ $\Rightarrow$ es gibt eine eindeutige LK bezüglich der Basis:

  $\underline{c} = c_1 \cdot \underline{b}_1 + ... + c_n \, \underline{b}_n$

  $c_1, ..., c_n$ heißen Koordinaten bezüglich dieser Basis.

Übergang von einer Basis zu einer anderen !?

Beispiel:

$$\boxed{B_1 = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}} \xrightarrow[\text{gegen } \underline{e}_1]{\underline{a}_2 \text{ in die Basis}} \boxed{B_2 = \{\underline{a}_2, \underline{e}_2\}} \xrightarrow[\text{gegen } \underline{e}_2]{\underline{a}_1 \text{ in die Basis}} \boxed{B_3 = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2\}}$$

Definition: Gegeben seien eine Basis $\underline{\mathbf{b}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{b}}_n$ des R^n und ein weiterer Vektor $\underline{\mathbf{a}} \in \mathbf{R}^n$.

Kann der Vektor $\underline{\mathbf{a}}$ mit einem Basisvektor $\underline{\mathbf{b}}_i$, $\quad \mathbf{i} \in \{1, \ldots, n\}$, so vertauscht werden, dass $\underline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{b}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{b}}_{i-1}, \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}_{i+1}, \ldots, \underline{\mathbf{b}}_n$ wieder eine Basis ist, so nennt man den Übergang zu dieser neuen Basis eine **elementare Basistrans-formation (BT)**.

Rechenschema der elementaren BT:

$$
\begin{array}{cc|cc}
 & & & \Downarrow \\
 & & \underline{a}_1 & \underline{a}_2 \\
\hline
\Leftarrow & \underline{e}_1 & 2 & 1 \\
 & \underline{e}_2 & 1 & 3
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cc|cc}
 & & & \Downarrow \\
 & & \underline{a}_1 & \underline{e}_1 \\
\hline
 & \underline{a}_2 & 2 & 1 \\
\Leftarrow & \underline{e}_2 & -5 & -3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{I} & \underline{a}_1 = 2\underline{e}_1 + \underline{e}_2 \\
\mathbf{II} & \underline{a}_2 = \underline{e}_1 + 3\underline{e}_2 \\
\\
\mathbf{II} \rightarrow & \underline{e}_1 = \underline{a}_2 - 3\underline{e}_2 \\
\\
\textbf{in I:} & \underline{a}_1 = 2\underline{a}_2 - 6\underline{e}_2 + \underline{e}_2 \\
 & \quad = 2\underline{a}_2 - 5\underline{e}_2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{I} & \underline{a}_1 = 2\underline{a}_2 - 5\underline{e}_2 \\
\mathbf{II} & \underline{e}_1 = \underline{a}_2 - 3\underline{e}_2 \\
\\
\mathbf{I} \rightarrow & 5\underline{e}_2 = 2\underline{a}_2 - \underline{a}_1 \rightarrow \quad \underline{e}_2 = \frac{2}{5}\underline{a}_2 - \frac{1}{5}\underline{a}_1 \\
\\
\textbf{in II:} & \underline{e}_1 = \underline{a}_2 - 3\left(\frac{2}{5}\underline{a}_2 - \frac{1}{5}\underline{a}_1\right) \\
 & \quad = -\frac{1}{5}\underline{a}_2 + \frac{3}{5}\underline{a}_1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cc}
 & \underline{e}_2 & \underline{e}_1 \\
\hline
\underline{a}_2 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\
\underline{a}_1 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5}
\end{array}
\quad \xrightarrow[\text{ordnen}]{} \quad
\begin{array}{c|cc}
 & \underline{e}_1 & \underline{e}_2 \\
\hline
\underline{a}_1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\
\underline{a}_2 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5}
\end{array}
$$

(Algorithmische) Regeln $\boxed{\text{R}}$

Wie erhalten wir die Elemente (Zahlen, Koordinaten) der neuen Tabelle aus den Elementen der alten Tabelle?

(1) **Zentralelement** (z) geht über in: $\frac{1}{z}$,

(2) die anderen Elemente der **Austauschzeile**

werden multipliziert mit: $\frac{1}{z}$,

(3) die anderen Elemente der **Austauschspalte**

werden multipliziert mit: $-\frac{1}{z}$,

(4) die restlichen Elemente werden
nach der **Kreuzregel** gebildet:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
\hline
 & & & & \vdots & \\
 & x & \cdots & & a & \\
 & \vdots & & & \vdots & \\
\cdots & b & \cdots & & z & \cdots \\
 & & & & \vdots & \\
\end{array}
$$

x geht über in: $x - \frac{a \cdot b}{z}$

Elementare Basistransformation und lineare Abhängigkeit von Vektoren

Sind die Vektoren $\underline{\mathbf{a}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\underline{\mathbf{a}}_2 = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\underline{\mathbf{a}}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

linear abhängig oder linear unabhängig?

	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$
$\underline{e}_1$	0	–10	–2
$\underline{e}_2$	1	2	0
$\underline{e}_3$	–1	3	1

	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{e}_3$
$\underline{e}_1$	–2	–4	2
$\underline{e}_2$	1	2	0
$\underline{a}_3$	–1	3	1

	$\underline{e}_2$	$\underline{a}_2$	$\underline{e}_3$
$\underline{e}_1$	2	$\boxed{0}$	2
$\underline{a}_1$	1	2	0
$\underline{a}_3$	1	5	1

Das Zentralelement muss von 0 verschieden sein. $\Rightarrow$ „Endtabelle“

Auswertung der Spalte für $\underline{a}_2$:

$\mathbf{\underline{a}_2 = 2\underline{a}_1 + 5\underline{a}_3}$

Satz:

Gegeben seien eine Basis in $\mathbf{R}^n$ und r Vektoren $\underline{\mathbf{a}}_1, \underline{\mathbf{a}}_2, ..., \underline{\mathbf{a}}_r \in \mathbf{R}^n$.
Die Vektoren $\underline{\mathbf{a}}_1, \underline{\mathbf{a}}_2, ..., \underline{\mathbf{a}}_r$ sind genau dann linear unabhängig, wenn sie sich durch elementare Basistransformationen alle zusammen in die Basis überführen lassen.

Der Rang einer Matrix

Allgemein gilt für eine beliebige Matrix: Die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen einer Matrix ist identisch mit der maximalen Anzahl linear unabhängiger Spalten dieser Matrix.

Definition: Die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten (bzw. Zeilen) einer Matrix $\underline{A}$ heißt **Rang** ($\rho(\underline{A})$ auch $r(\underline{A})$) der Matrix $\underline{A}$.

Sei z.B. $\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & -\mathbf{5} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{2} & \mathbf{1} & -\mathbf{3} \end{pmatrix}, \quad \rho(\underline{\mathbf{A}}) = \mathbf{?}$

Rangbestimmung mit elementarer Basistransformation:

	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$
$\underline{e}_1$	1	0	2
$\underline{e}_2$	3	–5	1
$\underline{e}_3$	1	–1	1
$\underline{e}_4$	–2	1	–3

	$\underline{e}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$
$\underline{a}_1$	1	0	2
$\underline{e}_2$	–3	–5	–5
$\underline{e}_3$	–1	–1	–1
$\underline{e}_4$	2	1	1

	$\underline{e}_1$	$\underline{e}_4$	$\underline{a}_3$
$\underline{a}_1$	1	0	2
$\underline{e}_2$	7	5	$\boxed{0}$
$\underline{e}_3$	1	1	$\boxed{0}$
$\underline{a}_2$	2	1	1

$\Rightarrow$ $\rho(\underline{A}) = 2$

Definition: Eine (n, n)-Matrix $\underline{A}$ heißt **regulär**, wenn $\rho(\underline{A}) = n$ ist.
Ist $\rho(\underline{A}) < n$, so nennt man sie **singulär**.

Bezeichnung für regulär auch: „Matrix mit vollen Rang“.