

## 3.2 Linearkombination und lineare Unabhängigkeit von Vektoren

### 3.2.1 Linearkombination von Vektoren

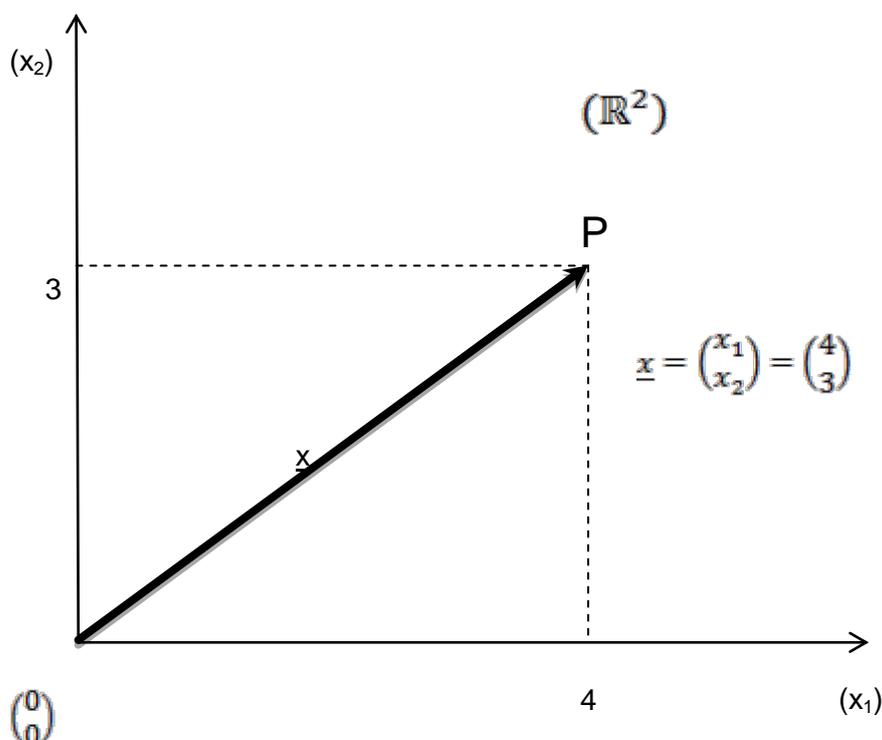
Geometrische Interpretation von Vektoren

$\mathbb{R}^2$ : Paare reeller Zahlen  $\longleftrightarrow$  Punkte in  $x_1, x_2$  – Ebene,

z.B. Punkt  $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

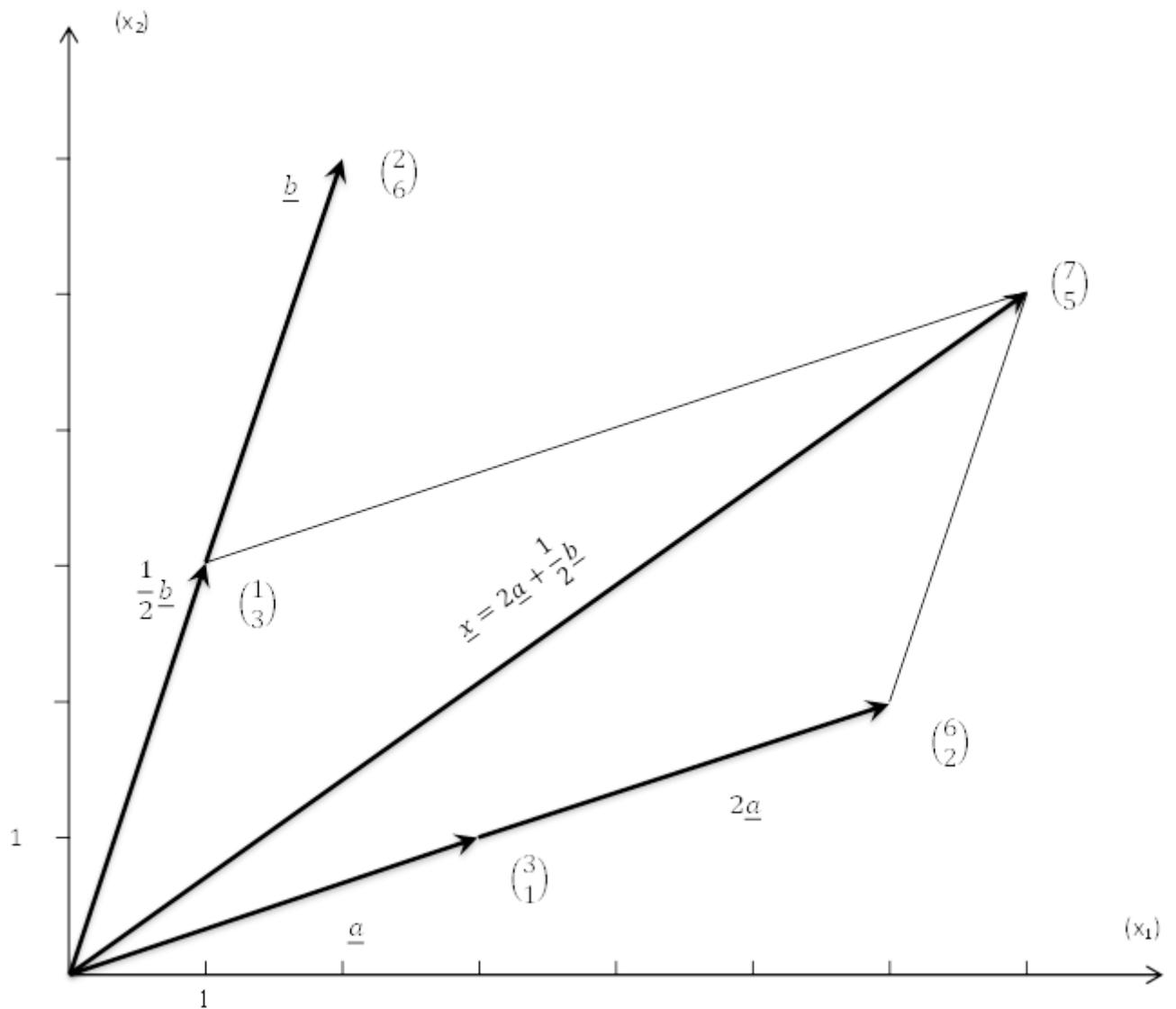
Vektor  $\underline{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

gerichtete Strecke (Länge, Richtung) auch  $\overrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}}$ .



$$\underbrace{\alpha \cdot \underline{a}; \quad \underline{a}_1 + \underline{a}_2}$$

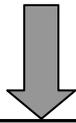
Kombination: z.B.  $2\underline{a} + \frac{1}{2}\underline{b}$



$\mathbb{R}^n$ : n-Tupel reeller Zahlen  $\longleftrightarrow$  Punkte im n-dimensionalen Raum  
 $\updownarrow$   
 Vektoren der Dimension n

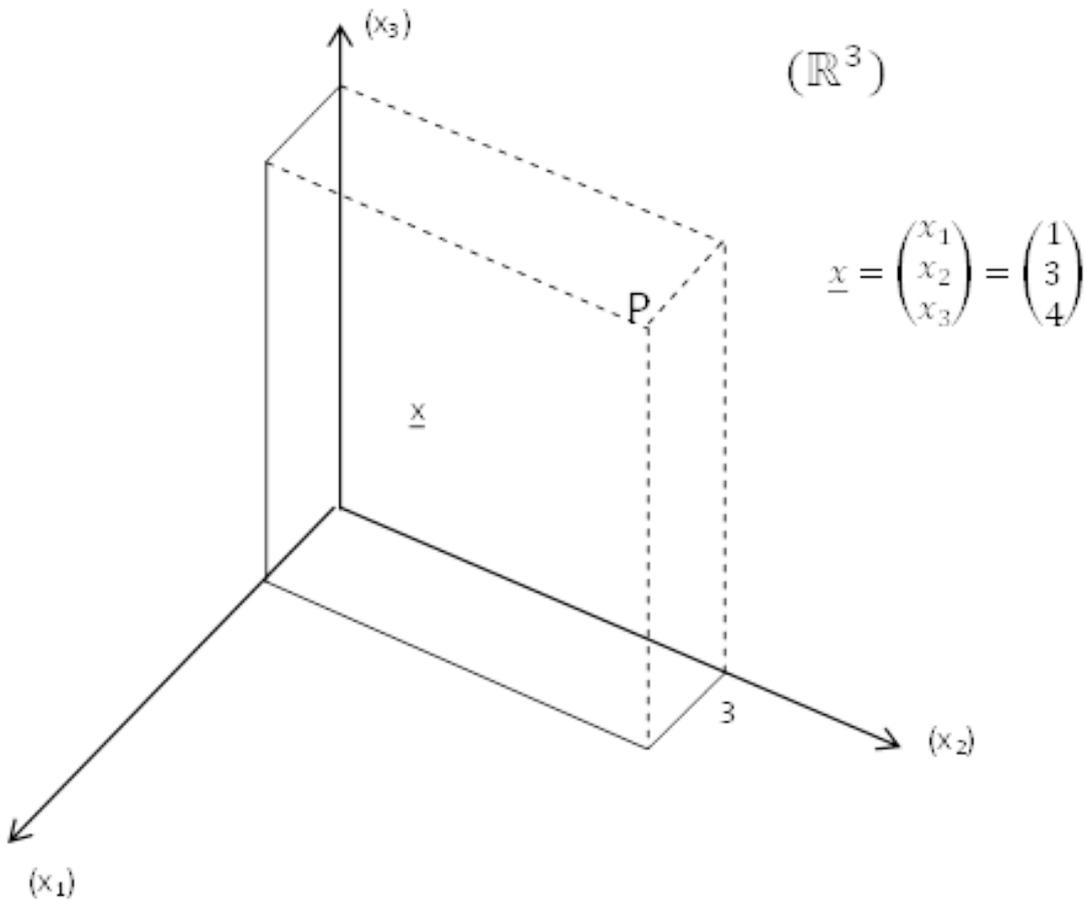
+ Struktur:

- Multiplikation mit Zahl
- Addition
- zusätzliche Eigenschaften



**$\mathbb{R}^n$ : n-dimensionaler Vektorraum**

$\mathbb{R}^1$  - Gerade,  $\mathbb{R}^2$  - Ebene,  $\mathbb{R}^3$  - Raum



Definition:

Sind Vektoren  $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k \in \mathbb{R}^n$  und  $k$  reelle Zahlen  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  gegeben,

so nennt man den Vektor  $\underline{b} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \underline{a}_i$  eine **Linearkombination** der

Vektoren  $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ .

Beispiele:

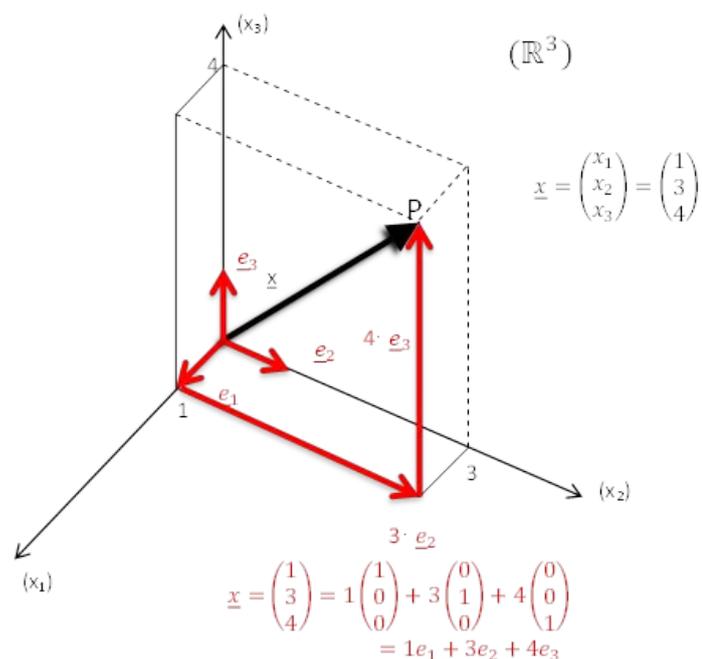
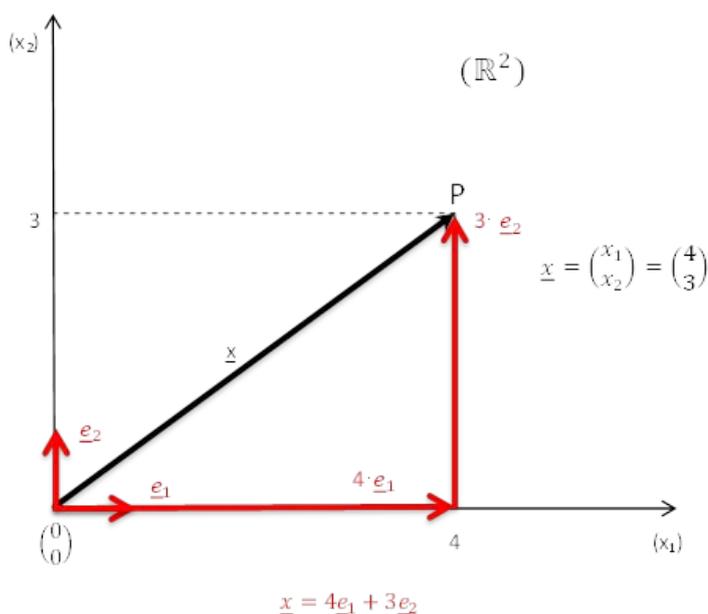
1)  $\underline{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  – LK von  $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ ;

$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  – LK von  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ ;

$\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$   $\underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$  Dann ist

$\underline{x} = 2\underline{a} + 0,5\underline{b}$  eine LK von  $\underline{a}$  und  $\underline{b}$  und andererseits ist

$\underline{x} = 7\underline{e}_1 + 5\underline{e}_2$  eine LK von  $\underline{e}_1$  und  $\underline{e}_2$ .



2) Lineares Gleichungssystem (LGS)

$$2x_1 - x_2 + 0,5x_3 + x_4 = 6,4$$

$$x_1 - 2x_3 = 0$$

$$-x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 10$$

äquivalente Vektor-Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0,5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} x_4 = \begin{pmatrix} 6,4 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} \text{---} \\ | \\ \underline{a}_1 \in \mathbb{R}^3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{---} \\ | \\ \underline{a}_2 \in \mathbb{R}^3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{---} \\ | \\ \underline{a}_3 \in \mathbb{R}^3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{---} \\ | \\ \underline{a}_4 \in \mathbb{R}^3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{---} \\ | \\ \underline{b} \in \mathbb{R}^3 \end{matrix}$

Der Vektor  $\underline{b}$  ist eine LK von  $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_4$ .

Matrix-Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0,5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,4 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Koeffizienten-  
matrix  $\underline{A}$

$$\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

### 3.2.2 Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Wir betrachten **Systeme** von Vektoren:

$$(1) \quad \underline{\mathbf{a}}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{a}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Gibt es ein  $\alpha$  mit  $\underline{\mathbf{a}}_1 = \alpha \cdot \underline{\mathbf{a}}_2$ ?  $\rightarrow$  Nein!

(Die Vektoren liegen auf verschiedenen Geraden)!

$$(2) \quad \underline{\mathbf{a}}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{a}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{a}}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lässt sich ein Vektor als LK der anderen Vektoren darstellen?

$\rightarrow$  Ja!

$$\underline{\mathbf{a}}_3 = 1 \cdot \underline{\mathbf{a}}_1 + 1 \cdot \underline{\mathbf{a}}_2$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \uparrow \\ \underline{\mathbf{a}}_1 + \underline{\mathbf{a}}_2 - 1 \cdot \underline{\mathbf{a}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{0}} \end{array}$$

Definition: Gegeben seien  $k$  Vektoren aus dem  $\mathbb{R}^n$  :  $\underline{\mathbf{a}}_1, \dots, \underline{\mathbf{a}}_k$ .

Die Vektoren heißen **linear unabhängig**, wenn aus der Darstellung

$$\underline{\mathbf{0}} = \alpha_1 \cdot \underline{\mathbf{a}}_1 + \alpha_2 \underline{\mathbf{a}}_2 + \dots + \alpha_k \cdot \underline{\mathbf{a}}_k \text{ folgt, dass}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0 \text{ gilt.}$$

Sonst nennen wir die Vektoren linear abhängig.

Bemerkungen:

- 1) Die Bedingung in der Definition sagt aus, dass sich der Null-Vektor nur auf die triviale Weise als LK der Vektoren  $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$  darstellen lässt.
- 2)  $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$  sind linear abhängig, wenn ein Vektor als LK der übrigen darstellbar ist. Das heißt, es existiert ein  $\alpha_i, i \in \{1, \dots, k\}$  mit  $\alpha_i \neq 0$ .
- 3) Eine Teilmenge von linear unabhängigen Vektoren ist auch linear unabhängig.

Beispiele: (1), (2) (siehe oben)

Sei  $k > n$ , dann gilt:  $k$ -Vektoren im  $\mathbb{R}^n$  (mehr als  $n$  Vektoren) sind immer linear abhängig.

Die Einheitsvektoren

$$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \underline{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \underline{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}$$

i-te Koordinate

des  $\mathbb{R}^n$  sind linear unabhängig.