3. Elemente der linearen Algebra

3.1 Matrizen und Vektoren

Beispiel: Tierbestände (in einer Region):

3 Betriebe: Milchkühe, Schweine- und Rindermast

Betriebs-Nr.	M	S	R
1	**34**	**2**	**14**
2	**120**	**-**	**-**
3	**150**	**40**	**30**

Rechteckiges Zahlenschema MATRIX $\Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{34} & \mathbf{2} & \mathbf{14} \\ \mathbf{120} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{150} & \mathbf{40} & \mathbf{30} \end{pmatrix}$

3.1.1 Definition der Matrix

Definition: Eine (m, n)-Matrix ist ein System von $\mathbf{m \cdot n}$ Zahlen $\mathbf{a_{ik}}$ (i = 1, 2,..., m; k = 1, 2, ..., n), die in einem rechteckigen Schema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & & a_{2n} \\ . & . & & & . \\ . & . & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

von m Zeilen und von n Spalten angeordnet sind.

Die Zahlen des Schemas heißen Elemente der Matrix.

Symbolik: $\underline{\mathbf{A}} = (a_{ij})_{i=1 \dots m \quad j=1, \dots n} = (a_{ij})_{(m,n)}$

i - Zeilenindex

j - Spaltenindex

Wo steht a_{32}?

Typ ($\underline{A}$): = (m, n), m - Anzahl der Zeilen

n - Anzahl der Spalten

Man spricht auch kurz von einer $\mathbf{m \times n}$-Matrix.

3.1.2 Spezielle Matrizen

1) Matrix nur mit einer Spalte (Typ: (m, 1)): **Spaltenvektor**,
   Matrix nur mit einer Zeile (Typ: (1, n)): **Zeilenvektor**.
   Bei Vektoren: Elemente $\rightarrow$ Koordinaten
   Anzahl der Elemente $\rightarrow$ Dimension des Vektors

$$\underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} \mathbf{a_1} \\ . \\ . \\ \mathbf{a_m} \end{pmatrix}$$

Dimension von $\underline{a}$ ist m.

Zeilenvektor $\underline{b}$ = $(b_1 \ldots b_n)$,
(Es gibt auch die Bezeichnung $\vec{\mathbf{a}}$)

Beispiel!

2) **Quadratische Matrix**: Matrix mit dem Typ: (n, n)

3) **Diagonalmatrix**: $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{0} & . & . & . & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{0} & & & . \\ . & \mathbf{0} & . & \mathbf{0} & & . \\ . & & \mathbf{0} & . & \mathbf{0} & . \\ . & & & \mathbf{0} & . & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & . & . & . & \mathbf{0} & \mathbf{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Hauptdiagonale

Beispiel!

4) $\underline{E} = (e_{ij})_{n,n}$: $e_{ij} = 0$ für i, j : $i \neq j$

$e_{ii} = 1$ für i = 1, ..., n

$\underline{E}$ heißt n-te **Einheitsmatrix** (n-ter Ordnung); in der Literatur auch $\underline{\mathbf{I}}$

Die Spalten der Einheitsmatrix $\underline{E}$

$$\underline{\mathbf{e}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \underline{\mathbf{e}}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{i-te Koordinate}, \cdots, \underline{\mathbf{e}}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

heißen Einheitsvektoren.

5) Obere Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & & & \\ . & . & a_{33} & & & . \\ . & & 0 & . & & . \\ . & & & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

3.1.3 Relationen zwischen Matrizen bzw. Vektoren

$\underline{A} = \underline{B}$: (1) Typ ist gleich.

(2) Gleichgestellte Elemente stimmen überein.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{100} \\ \mathbf{10} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{100} \\ \mathbf{10} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \end{pmatrix};$$

$$\underline{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{5} \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{lcr} \mathbf{u_1} & = & \mathbf{-2} \\ \mathbf{u_2} & = & \mathbf{1} \\ \mathbf{u_3} & = & \mathbf{5} \end{array}$$

$\underline{A} \leq \underline{B}$: (1) Typ ist gleich.

(2) $a_{ij} \leq b_{ij}$

analog $\underline{A} < \underline{B}$

Beispiel!

3.1.4 Transponierte einer Matrix

$\underline{A} \rightarrow$ Zeilen als Spalten schreiben $\rightarrow \underline{A}^T$ (auch $\underline{A}'$)

Beispiel!

Gilt $\underline{A}^T = \underline{A}$, dann heißt $\underline{A}$ **symmetrisch** ($a_{ij} = a_{ji}$).

Beispiel!

3.1.5 Verknüpfungen von Matrizen

Addition:

$\underline{A}$, $\underline{B}$ mit Typ: (m, n),

Eine Matrix $\underline{C}$ mit $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ heißt Summe
der Matrizen $\underline{A}$ u. $\underline{B}$: $\underline{A} + \underline{B}$

analog $\underline{A} - \underline{B}$

Beispiel!

Multiplikation einer reellen Zahl mit einer Matrix:

$\mathbf{k \in R,} \qquad \mathbf{k \cdot \underline{A} := (k \cdot a_{ij})}$

Beispiel!

Multiplikation eines Zeilenvektors mit einem Spaltenvektor (auch Skalarprodukt oder inneres Produkt):

Zeilenvektor · Spaltenvektor,

Konvention: $\underline{a}$ soll immer ein Spaltenvektor sein;
für einen Zeilenvektor schreiben wir dann: $\underline{a}^T$.

Definition: Die aus zwei Vektoren

$$\underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} \mathbf{a_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{a_n} \end{pmatrix} \quad \textbf{und} \quad \underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \mathbf{b_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{b_n} \end{pmatrix}$$ gebildete reelle Zahl (Skalar)

$$\mathbf{z = a_1 \cdot b_1 + \ldots + a_n \cdot b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i}$$

heißt **Skalarprodukt** $\underline{a}^T \cdot \underline{b}$ dieser Vektoren.

$$\mathbf{\underline{a}^T \cdot \underline{b} = (a_1 \quad a_2 \quad . \quad . \quad . \quad a_n)} \begin{pmatrix} \mathbf{b_1} \\ \mathbf{b_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{b_n} \end{pmatrix}$$

Beispiele:

1) $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \\ \tfrac{1}{2} \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot (-5) + 6 \cdot \tfrac{1}{2} = 4$$

2) $$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \underline{u}^T \cdot \underline{v} = 0$$ (orthogonal)

3) Die Gleichung $4x_1 + x_2 - 3x_3 = 10$ lässt sich mit Hilfe der Vektoren

$$\underline{a}^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$ als Skalarprodukt

$\underline{a}^T \, \underline{x} = 10$ schreiben.

Multiplikation von Matrizen

Beim Skalarprodukt: $\underline{a}^T \cdot \underline{b}$ gilt:

Typ ($\underline{a}^T$) = (1, **n**), Typ (b) = (**n**, 1).

Wir betrachten nun die Matrizen $\underline{A}$ und $\underline{B}$ mit

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad \underline{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

mit Typ ($\underline{A}$) = (3, 4), Typ ($\underline{B}$) = (4, 2)

und bilden alle möglichen Skalarprodukte:

Spalte von $\underline{B}$ / Zeile von $\underline{A}$	1	2
1	3	4
2	-3	4
3	2	1

Definition: Gegeben seien eine (m, p) Matix $\underline{A}$ und eine (p,n)-Matrix $\underline{B}$ (m, n, p $\in$ N).

Die (m, n)-Matrix $\underline{\mathbf{C}} = (\mathbf{c_{ik}})_{i=1 \ldots m \quad k=1, \ldots n}$

deren Elemente c_{ik} das Skalarprodukt der i-ten Zeile von $\underline{A}$ mit der k-ten Spalte von $\underline{B}$ sind, heißt **Produkt** $\underline{A} \cdot \underline{B}$ der Matrizen $\underline{A}$ und $\underline{B}$.

Bemerkungen:

1)

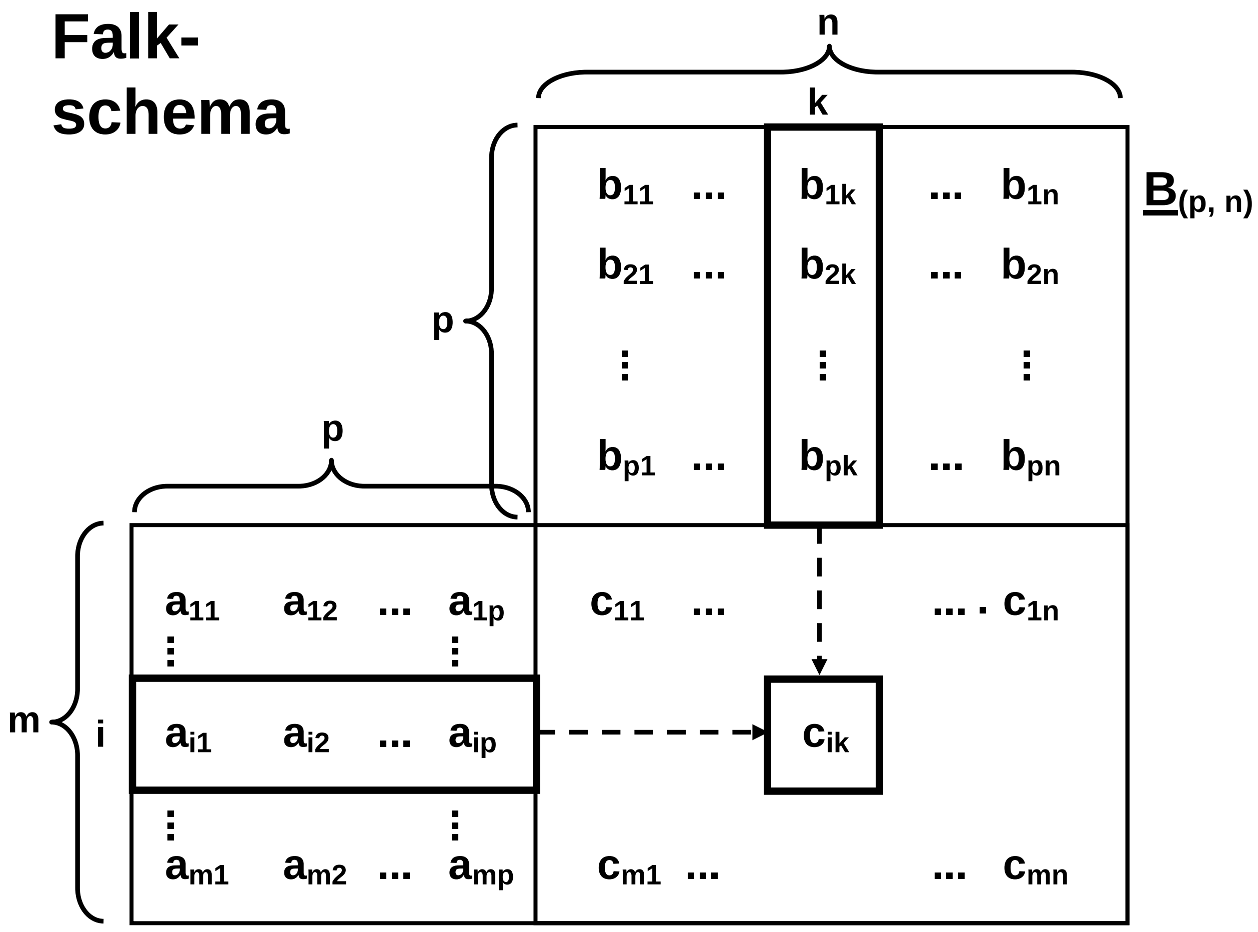
$$\underline{A}\,\underline{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1p} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ a_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{1n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ b_{p1} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{pn} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\sum_{r=1}^{p} a_{ir} \cdot b_{rk} \right)_{i=1 \ldots m \quad k=1, \ldots n}$$

2) Günstig zur Berechnung des Produkts von Matrizen ist die Anordnung im Falk'schen Schema:

				1	0
				2	-1
				1	2
				0	0
1	0	2	-1	3	4
0	-2	1	3	-3	4
4	-1	0	0	2	1

Falk-schema



$\underline{A}_{(m,\,p)}$

$\underline{C}_{(m,\,n)} = \underline{A}_{(m,\,p)} \bullet \underline{B}_{(p,\,n)}$

3) Die Multiplikation ist nur möglich, wenn die Anzahl der Spalten der ersten Matrix mit der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix übereinstimmt.

4) Die Reihenfolge der Faktoren ist zu beachten!

5) Es gilt: $(\underline{A} \cdot \underline{B})^T = \underline{B}^T \cdot \underline{A}^T$

Beispiele:

a)

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{E}}} = \underline{\mathbf{A}} \; ;$$

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}}_2 \cdot \underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{A}} \quad ; \quad \underline{\underline{\mathbf{E}}}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{x}}$$

b)

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ -5 & -10 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

also $\underline{A} \cdot \underline{B} \neq \underline{B} \cdot \underline{A}$

$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{0} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ aber $\underline{A} \neq \underline{0}$ und $\underline{B} \neq \underline{0}$

c)

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{A}\ \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 \\ & & 3x_2 & + & x_3 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Seien} \quad x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \underline{A}\ \underline{x}^0 = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Matrixschreibweise des linearen Gleichungssystems (LGS)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{matrix} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -4 \\ & & 3x_2 & + & x_3 & = & 10 \end{matrix}$$

$\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ ($\underline{x}^0$ ist eine Lösung des LGS!)

d) Ökonomisches Beispiel:

Rohstoffe $\rightarrow$ Zwischenprodukte $\rightarrow$ Endprodukte

3.1.6 Input / Output-Analyse

Amerikanischer Nationalökonom Leontief (Anfänge: 1936-1941), Volkswirtschaft unterschieden nach Sektoren (Zweigen, Stufen), Stoff- bzw. Wertflüsse (in Geldeinheiten), „Was wird gebraucht? Was kommt aus dem System heraus?“

a) Einfache Struktur: $\boxed{\text{Rohstoffe}} \rightarrow \boxed{\text{System}} \rightarrow \boxed{\text{Produkte}}$
(vgl. d) oben)

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ . \\ . \\ . \\ r_m \end{pmatrix} = \underline{R} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

b) Verflochtene Struktur: z.B. Beziehungen zwischen Vorleistungen, Produktion und Dienstleistungen

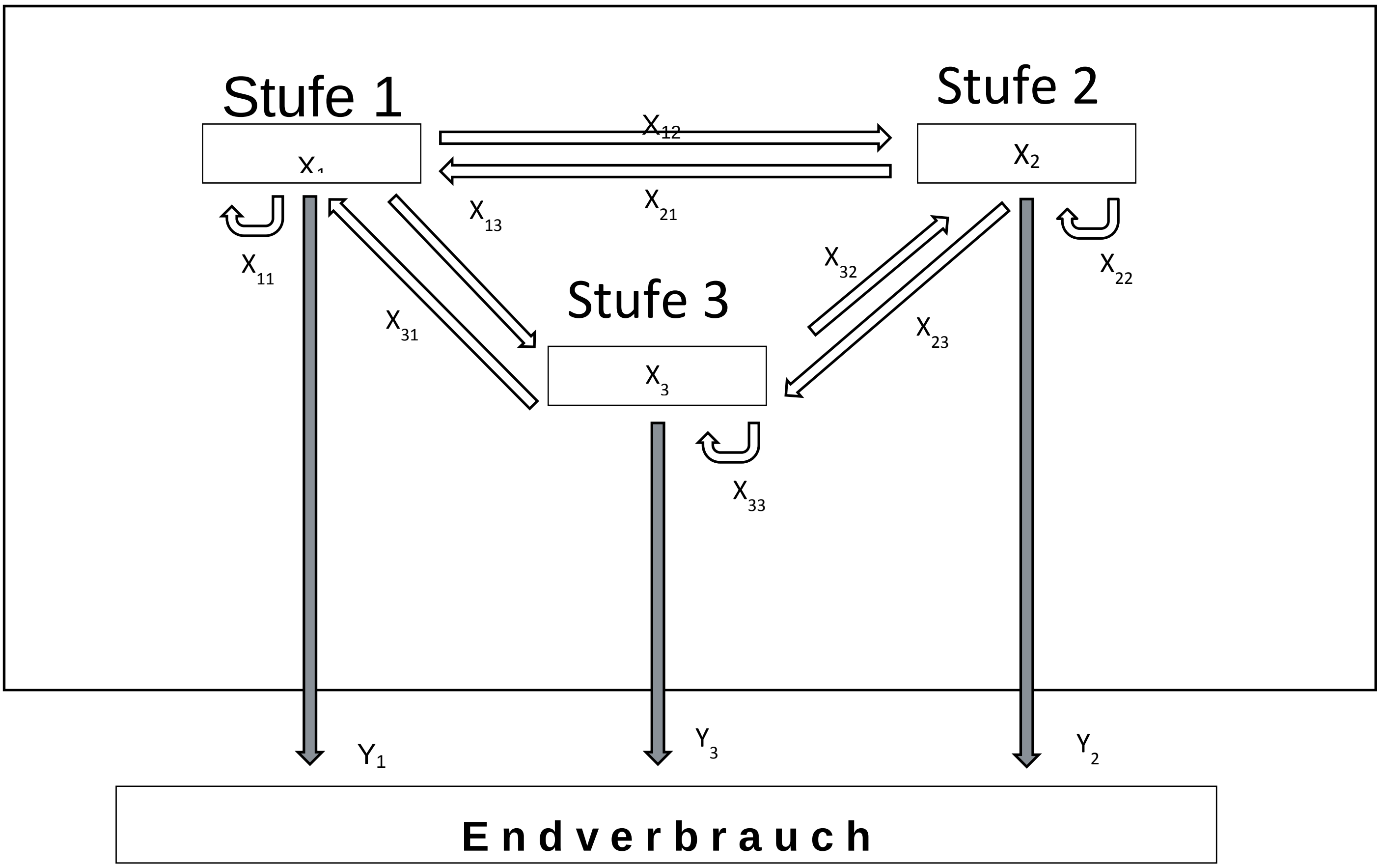
Allgemeines Vorgehen für n = 3:

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \text{ Stoffflüsse;}$$

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \text{ Endverbrauchsvektor oder Endnachfrage}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ Produktionsvektor}$$

Ökonomisches Flußbild bei 3 Zweigen(bzw. Produktionsstufen)



Bilanzgleichungen:

$$x_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13} + y_1$$

$$x_2 = x_{21} + x_{22} + x_{23} + y_2$$

$$x_3 = x_{31} + x_{32} + x_{33} + y_3$$

$$\underline{x} = \underline{X} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} + \underline{y}$$

$$\mathbf{a_{ij}} = \frac{\mathbf{x_{ij}}}{\mathbf{x_j}}$$

heißen Inputkoeffizienten oder Koeffizienten des direkten Verbrauchs oder auch Produktionskoeffizienten.

Dann ist

$$
\begin{aligned}
&& \underline{x} &= \underline{A}\,\underline{x} + \underline{y} \\
\text{g.d.w.} && \underline{E}\,\underline{x} &= \underline{A}\,\underline{x} + \underline{y} \\
\text{g.d.w.} && \underline{E}\,\underline{x} - \underline{A}\,\underline{x} &= \underline{y} \\
\text{g.d.w.} && (\underline{E} - \underline{A})\,\underline{x} &= \underline{y}
\end{aligned}
$$

Zwei Fragestellungen:

(1) $\underline{y}$ gegeben, $\underline{x}$ gesucht? $\rightarrow$ später

(2) $\underline{x}$ gegeben, so ist $\underline{y}$ durch Matrizenmultiplikation berechenbar.

Beispiel:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}, \quad \underline{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$ seien bekannt in einem bestimmten Jahr.

$$\underline{A} = \left(\frac{x_{ij}}{x_j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{20} & \frac{6}{30} \\ \frac{3}{10} & \frac{4}{20} & \frac{3}{30} \\ \frac{4}{10} & \frac{2}{20} & \frac{9}{30} \end{pmatrix}$$

$$\underline{E} - \underline{A} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & -\frac{2}{20} & -\frac{6}{30} \\ -\frac{3}{10} & \frac{16}{20} & -\frac{3}{30} \\ -\frac{4}{10} & -\frac{2}{20} & \frac{21}{30} \end{pmatrix}$$

Die Lieferung für den Endverbrauch ergibt sich aus

$$(\underline{E} - \underline{A})\ \underline{x} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & -\frac{2}{20} & -\frac{6}{30} \\ -\frac{3}{10} & \frac{16}{20} & -\frac{3}{30} \\ -\frac{4}{10} & -\frac{2}{20} & \frac{21}{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textbf{Zweig 1} \\ \textbf{Zweig 2} \\ \textbf{Zweig 3} \end{matrix}$$