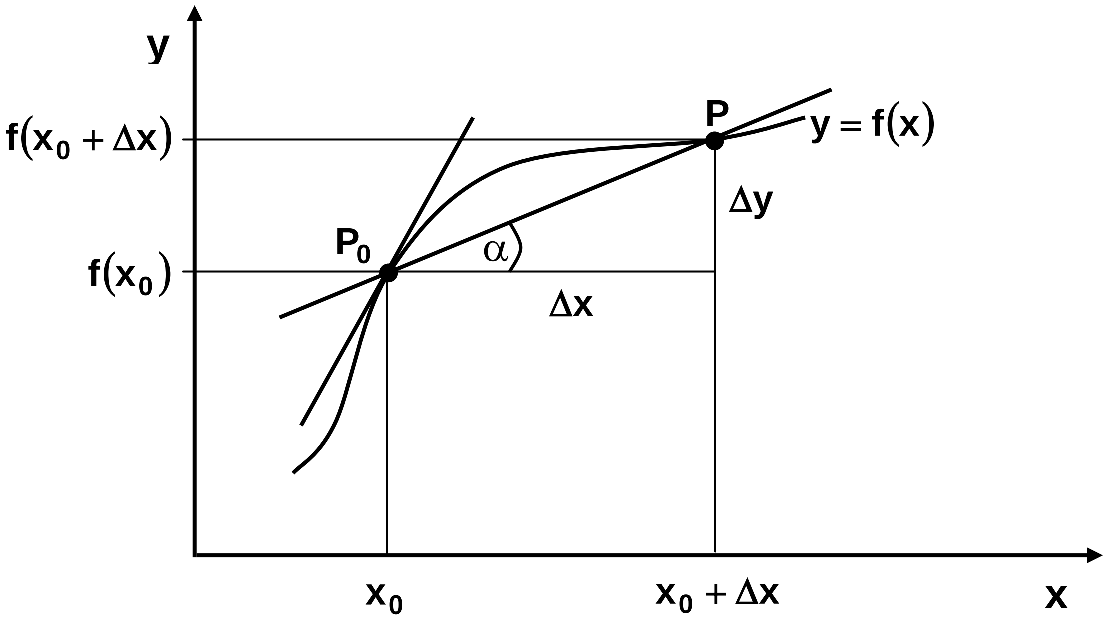
2.2 Differentialrechnung, Integralrechnung

Bei vielen ökonomischen und anderen praktischen Fragestellungen interessiert das Änderungsverhalten von Funktionen.



Differenzenquotient: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

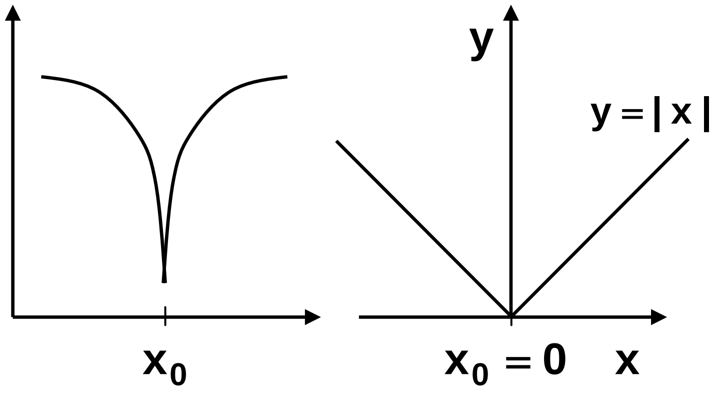
Übergang zum Grenzwert (rechts- und linksseitig)

existiert der Differentialquotient

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad ?$$

nein

f nicht differenzierbar in x_0



ja

f differenzierbar in x_0

Der Grenzwert heißt Ableitung der Funktion f im Punkt x_0

mit der Bezeichnung $f'(x_0)$

(Anstieg, Steigung der Funktion in x_0;

Anstieg der Tangente an die Funktion $f(x)$ im Punkt x_0).

Die Funktion $\mathbf{y = f(x)}$ heißt differenzierbar, wenn $\mathbf{f(x)}$ in allen Punkten des Definitionsbereichs differenzierbar ist.

Die Ableitungen in allen Punkten bilden wieder eine Funktion der Variablen x, die mit $\mathbf{f'(x)}$ oder kurz $\mathbf{f'}$ (nach Lagrange) bzw. mit $\mathbf{\frac{dy}{dx}}$ (nach Leibnitz) bezeichnet wird.

Technik des Differenzierens:

Ableitung der Grundfunktionen	
$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$ $\begin{cases} \text{a)} & n \in N,\ x \in R \\ \text{b)} & n \in G,\ x \neq 0 \\ \text{c)} & n \in R,\ x > 0 \end{cases}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
a^x	$a^x \cdot \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$

+

Ableitungsregeln	
Summenregel	$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
Produktregel	$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotientenregel	$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x))}{(g(x))^2}$
Kettenregel	$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

$\Downarrow$

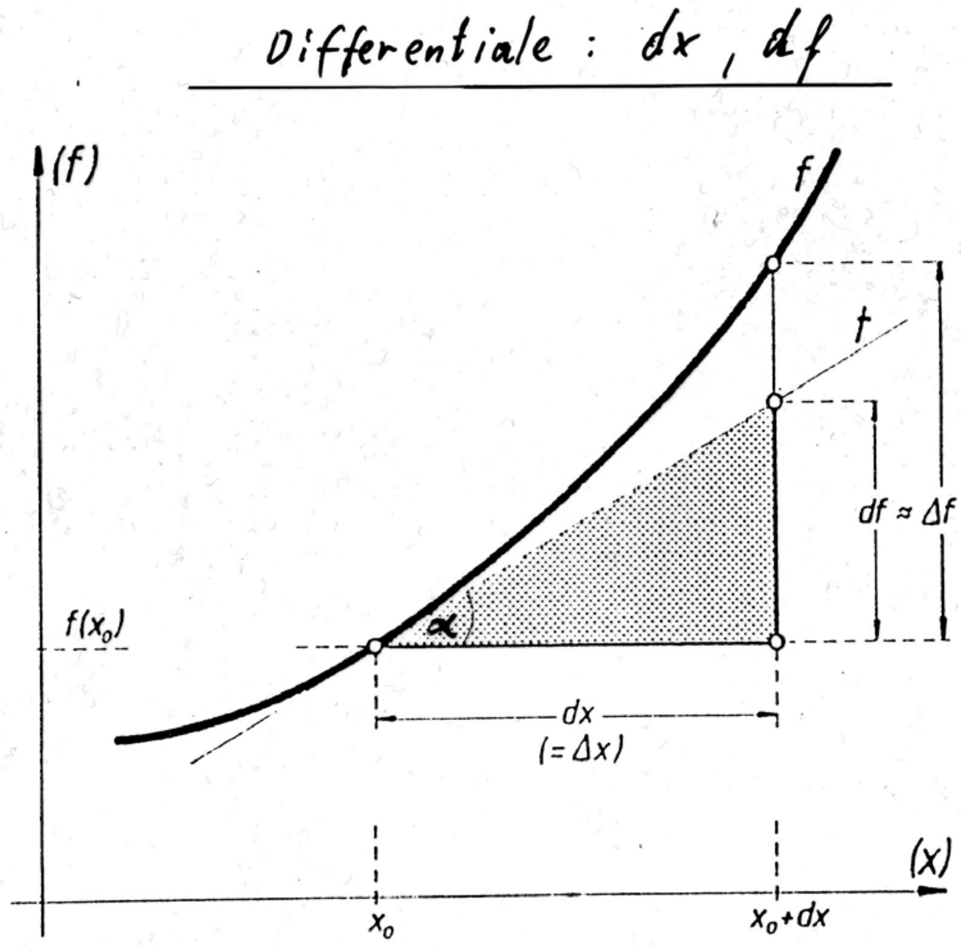
Ableitung „verknüpfter“ Funktionen

Höhere Ableitungen:

Ableitungen der ersten Ableitung $\mathbf{f'(x)} \Rightarrow \mathbf{f''(x)}$ zweite Ableitung

3. Ableitung: $\mathbf{f'''(x)}$

n. Ableitung: $\mathbf{f^{(n)}(x)}$



Anwendungen der Ableitung von Funktionen:

a) Extremwertuntersuchungen

lokales Maximum/Minimum an der Stelle $\mathbf{x_0}$

$(f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) \neq 0)$

b) Kurvendiskussion

$y = f(x)$ $\rightarrow$ Eigenschaften $\rightarrow$ Graf der Funktion

c) Ökonomie und Naturwissenschaften

<u>Grenzfunktion:</u>

$G(x) = E(x) - K(x) \rightarrow \max$

Gewinn als Erlös minus Kosten

notwendige Bedingung

$$G'(x) = E'(x) - K'(x) = 0$$

bzw. $E'(x) = K'(x)$ Grenzerlös gleich Grenzkosten

<u>Elastizität:</u>

Preiselastizität der Nachfrage (um wie viel % ändert sich die Nachfrage, wenn sich der aktuelle Preis um 1% ändert?)

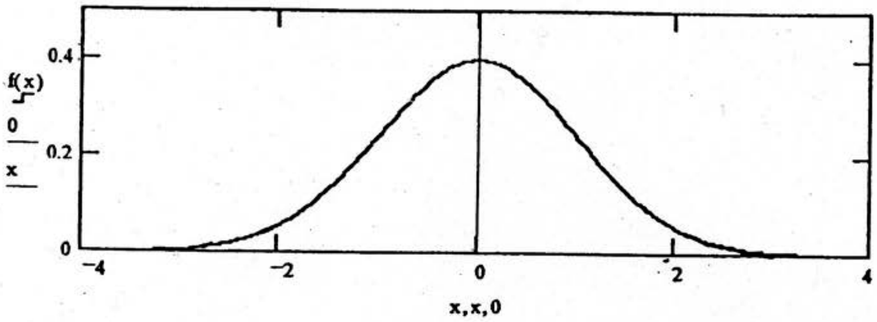
$$\varepsilon_{n,p} := n'(p) \cdot \frac{p}{n(p)}$$

<u>Wachstumsfunktionen:</u>

exponentiell; mit Sättigung (logistische Funktion, sigmotisch (s-förmig))

Gauß'sche Glockenkurve $f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

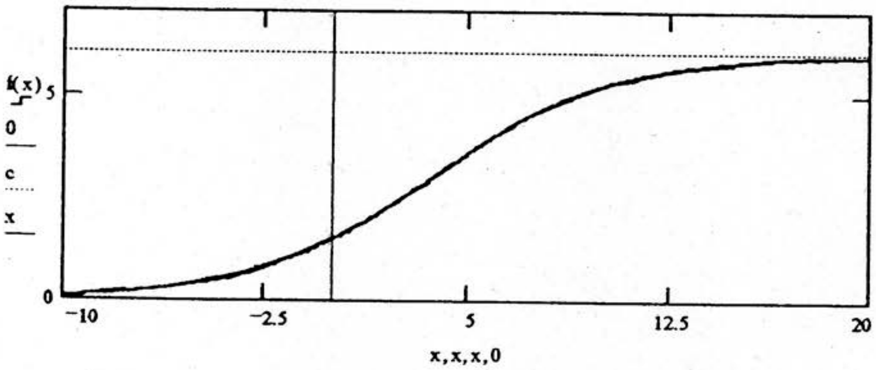
$x := -4, -3.99 .. 4$



logistische Funktion $f(x) := \frac{c}{1 + a\cdot e^{-b\cdot x}}$

$a := 3 \quad b := 0.3 \quad c := 6$

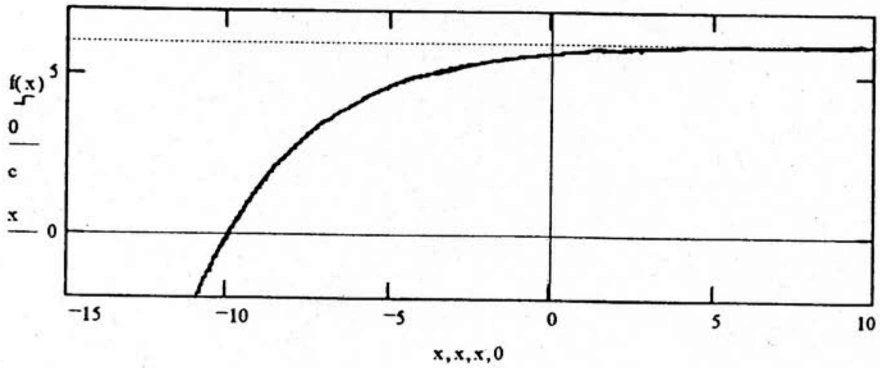
$x := -10, -9.9 .. 20$



Mitscherlich-Funktion $f(x) := c\cdot\left(1 - e^{-a - b\cdot x}\right)$

$a := 3 \quad b := 0.3 \quad c := 6$

$x := -20, -19.9 .. 10$



Integralrechnung

(1) Unbestimmtes Integral

Umkehren des Differenzierens (schwieriger)

$$\int \mathbf{f(x)\,dx} = \left\{ \mathbf{F(x)} \,\middle|\, \mathbf{F'(x) = f(x)} \right\}$$

Menge aller Stammfunktionen F von f (additive Konstante c)

(2) Bestimmtes Integral (Riemannsches Integral) als Grenzwert

definiert $\displaystyle\int_a^b \mathbf{f(x)\,dx}$

misst die Fläche zwischen dem Grafen von f und der x-Achse im Bereich von a bis b.

(3) Berechnung mit einer Stammfunktion

$$\int_a^b \mathbf{f(x)\,dx} = \mathbf{F(b) - F(a) =: F(x)}\Big|_a^b$$

Beispiel: $\displaystyle\int_1^2 \mathbf{3x^2\,dx} = \mathbf{x^3}\Big|_1^2 = \mathbf{2^3 - 1^3 = 8 - 1 = 7}$