Futtermischung

(Beispiel nach OHSE, D. (2004/2005): Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Bd. I u. II, München: Vahlen)

Zur Fütterung von Hühnern einer Farm sind drei Futtermittel F_1, F_2 und F_3 vorgesehen, die gemischt werden sollen, so dass das Futter

mindestens 80 ME Kohlehydrate (K),
mindestens 120 ME Eiweiß (E) und
höchstens 60 ME Fett (F)

enthält.

Folgende Tabelle gibt an, wie viel jede Mengeneinheit der Futtermittel kostet und welche ME der drei Komponenten in ihnen enthalten sind.

	K	E	F	Preis (€)
F_1	2	3	1	60
F_2	3	1	½	45
F_3	1	2	1	36

Aus welchen Mengen soll das Futter gemischt werden, so dass die Gesamtkosten minimal werden?

Die mathematische Modellierung dieser Aufgabe führt auf die lineare Optimierungsaufgabe

$$\min \left\{ 60x_1 + 45x_2 + 36x_3 \;\middle|\; \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq \;\; 80 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 120, \; x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 \leq \; 60 \end{array} \right\}$$

1. Mengentheoretische und arithmetische Hilfsmittel

1.1 Elemente der Mengenlehre

a) **Definition:**
Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von Objekten (zu einem neuen Objekt).

Symbolik:

1) Elemente einer Menge: kleine lateinische Buchstaben.
   Eine Menge: großer lateinischer Buchstabe.

2) $\mathbf{M} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{H(x)}\}$ die Menge ist durch die Elemente festgelegt, die die Bedingung oder Eigenschaft H (x) erfüllen.

3) $\mathbf{M} = \{\mathbf{x_1, x_2, ..., x_n}\}$ Aufzählung der Elemente.

4) $\mathbf{x_k \in M}$ $\mathbf{x_k}$ ist ein Element von M (k – Index).

5) $\exists$ Existenz-Operator: Es existiert ein Element mit ...
   $\forall$ All-Operator: Für alle Elemente gilt ...

b) Spezielle Mengen

$\emptyset \quad \left(:= \{ x \mid x \neq x \} \right)$	leere Menge
$N = \{0, 1, 2, ...\}$	Menge der natürlichen Zahlen
$G = \{0, +1, -1, +2, -2, ...\}$	Menge der ganzen Zahlen
P	Menge der rationalen Zahlen (endliche oder periodische Dezimalzahlen)
R	Menge der reellen Zahlen

Als Teilmengen reeller Zahlen spielen die **Intervalle** eine wichtige Rolle.

Für reelle Zahlen a und b bezeichnet man

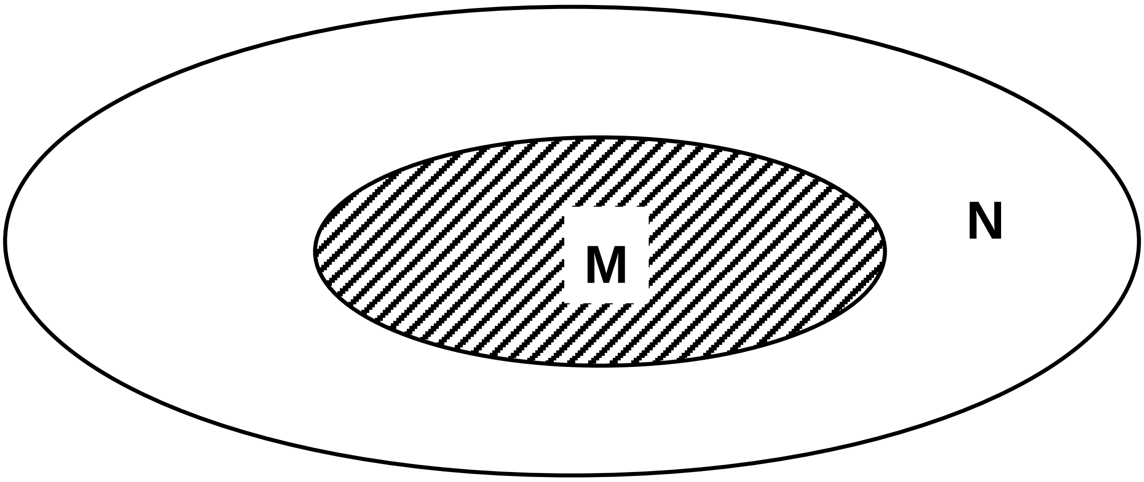
$(a,b) \;:= \{ x \in R \mid a < x < b \}$ als offenes Intervall,

$[a,b] \;:= \{ x \in R \mid a \leq x \leq b \}$ als abgeschlossenes Intervall.

c) Relationen zwischen Mengen

$\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$ (M ist **Teilmenge** von N) genau dann, wenn (kurz g.d.w.) jedes Element von M ist auch Element von N.

VENNsche Diagramm:



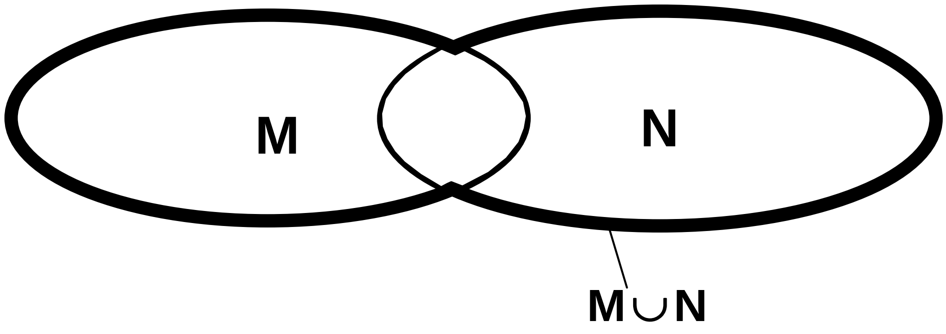
Für jede Menge M gilt $\emptyset \subset \mathbf{M}$.

$\mathbf{M} = \mathbf{N}$ g.d.w. $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$ und $\mathbf{N} \subset \mathbf{M}$

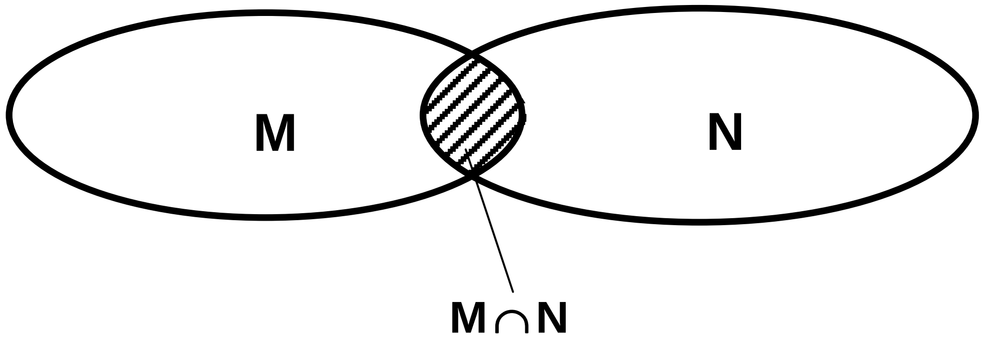
d) Operationen mit Mengen

(1) **Vereinigung** $\mathbf{M \cup N := \{ a \mid a \in M \ \underline{ODER} \ a \in N \}}$

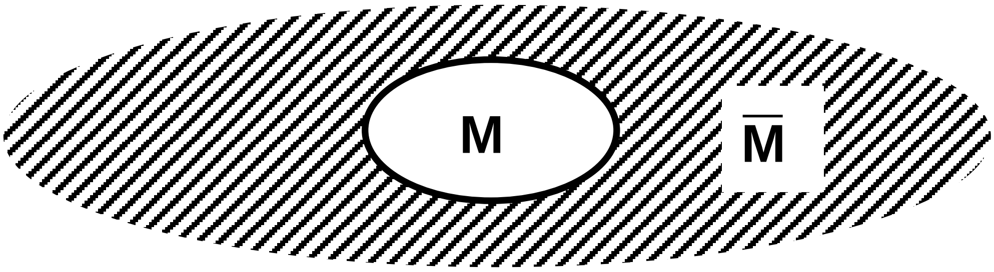
VENNsches Diagramm:



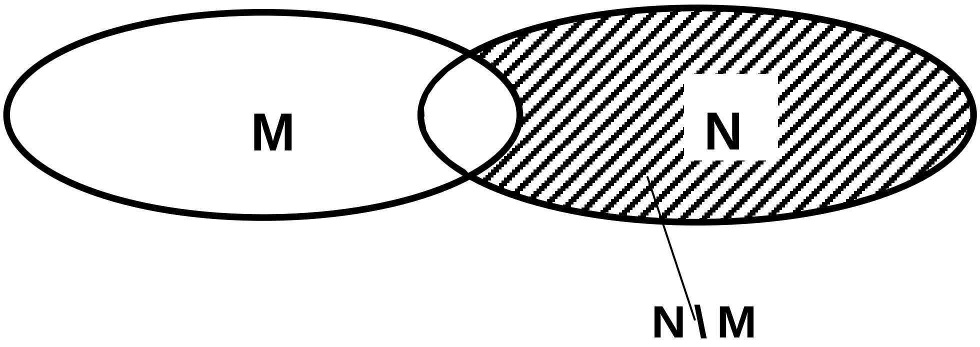
(2) **Durchschnitt** $\mathbf{M \cap N := \{ a \mid a \in M \ \underline{UND} \ a \in N \}}$



(3) **Kompliment** $\mathbf{\overline{M} := \{ a \mid a \notin M \}}$



(4) **Differenzmenge** $\mathbf{N \setminus M := \{a \mid a \in N \text{ und } a \notin M\}}$



(5) **Potenzmenge** $\mathbf{2^M}$ **von M** (Menge aller Teilmengen von M)

$$\mathbf{2^M := \{N \mid N \subset M\}}$$

Beispiel: $\mathbf{\{a,b\}}$

$$\mathbf{2^{\{a,b\}} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}}$$

(6) **Geordnetes Paar**

(a, b) geordnete zweielementige Menge

(a, b) = (c, d) g.d.w. a = c und b = d
(f, g) = (3, -7) g.d.w. f = 3 g = -7

(7) **Kartesisches Produkt** (Kreuzprodukt)

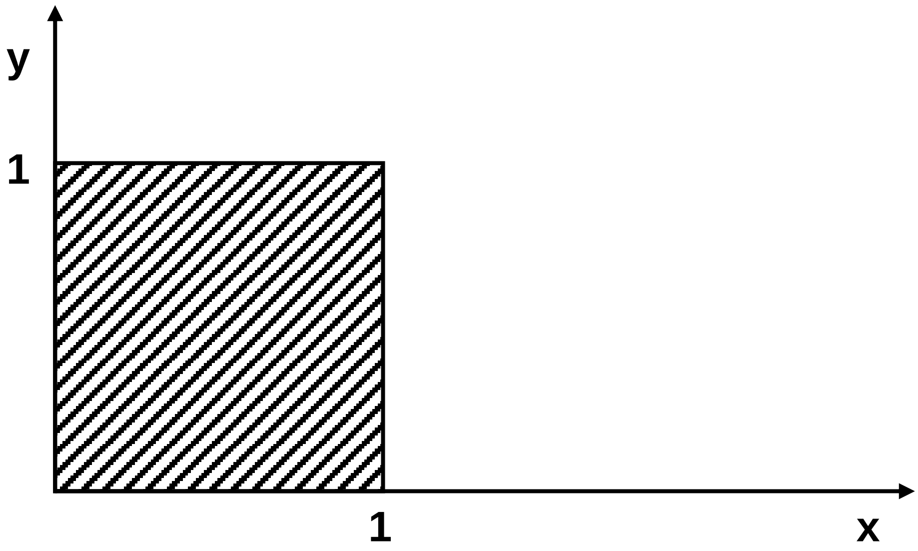
$$\mathbf{M \times N := \{(a,b) \mid a \in M \text{ und } b \in N\}}$$

Beispiel:

1) $\mathbf{M = \{1,2\},\ N = \{x,y\},\ M \times N = \{(1,x),\ (1,y),\ (2,x),\ (2,y)\}}$

2) $\mathbf{X = \{x \mid 0 \le x \le 1\}}$

$\mathbf{Y = \{y \mid 0 \le y \le 1\}}$



3) $\mathbf{R \times R = R^2 := \{(x,y) \mid x \in R,\ y \in R\}}$

$\mathbf{R^3 := R \times R \times R}$

(8) f heißt **Abbildung** aus M in N g.d.w. $\mathbf{f \subset M \times N}$

Beispiele überlege man sich zu obigen Kreuzprodukten.

(9) **Umkehrabbildung $\mathbf{f^{-1}}$ von f** (auch: Inverse von f)

$$\mathbf{f^{-1} := \{(a,b) \mid (b,\ a) \in f\}}$$

(10) **Funktion**

Definition:

Eine Abbildung f heißt **Funktion** oder eindeutige Abbildung von M in N g.d.w.
zu jedem $\mathbf{a \in M}$ gibt es genau ein Element $\mathbf{b \in N}$ mit $\mathbf{(a,b) \in f}$.

Andere Schreibweise für $\mathbf{(a,b) \in f}$ ist $\mathbf{b = f\,(a)}$

Definitionsbereich: **M**

Wertebereich: $\mathbf{\{b \in N \mid \exists\ a \in M\ \text{mit}\ (a,b) \in f\}}$

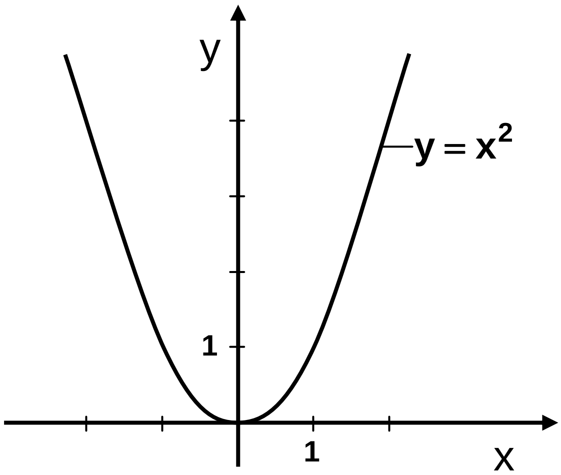
verschiedene Stufen der Verallgemeinerung:

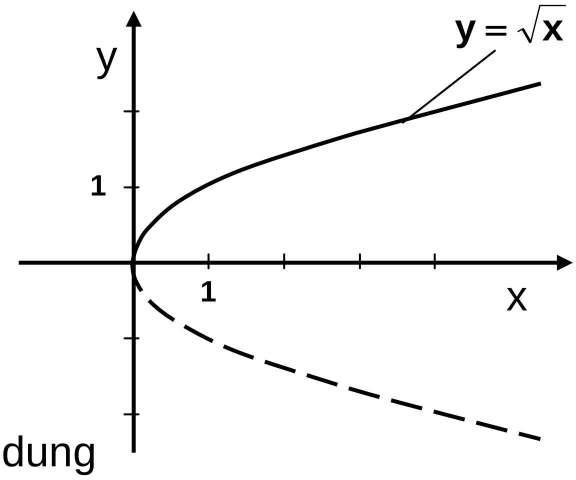
$\mathbf{y = x^2 + 3\ x - 2}$ feste Parabel bei $\mathbf{(-\frac{3}{2}, -\frac{17}{4})}$

$\mathbf{y = x^2 + p\ x + q}$ Parabel mit den Parametern p und q

$\mathbf{y = f(x)}$ Funktion

Beispiel: $\mathbf{y = x^2}$





Die existierende Umkehrabbildung
von $\mathbf{y = x^2}$ ist keine Funktion.

Definition:

f heißt **eineindeutige Abbildung** g.d.w.

$\mathbf{f}$ **und** $\mathbf{f^{-1}}$ sind eindeutig.

Beispiel: $\mathbf{y = x^2}$ **, für** $\mathbf{x \geq 0} \longleftrightarrow \mathbf{y = \sqrt{x}}$ **, für** $\mathbf{x \geq 0}$

zueinander inverse Funktionen
(Umkehrfunktion)