## 1.2 Das Summenzeichen

Bezugnahme auf das Futtermischungsproblem:

indizierte Variablen:

$x_i$ - Menge der Futtersorte $F_i$

$p_i$ - Preis je ME $(p_1 = 60,\ p_2 = 45,\ p_3 = 36)$

Lösung: $x_1 = 0,\ x_2 = 8,\ x_3 = 56$

ZF: 2376

ZF: $60x_1 + 45x_2 + 36x_3 = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = \sum_{i=1}^{3} p_ix_i$

allgemein: $\sum_{i=k}^{n} a_i = a_k + a_{k+1} + ... + a_n$

Summations-Variable $a_i$

(Ausdruck, in dem i meist enthalten ist, aber nicht sein muss.)

Summations-Index: i

Summations-Grenzen: k, n

Beispiele: $\sum_{i=1}^{3} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36$

$$\sum_{i=-2}^{4} 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 7 \cdot 3 = 21$$

**Doppelsummen**, mehrfache Summen

Die Summationsvariable kann selbst eine Summe sein.

Beispiel:

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=-1}^{1} 2^i \cdot (3j+1)\right) = \sum_{j=-1}^{1} 2^1\ (3j+1) + \sum_{j=-1}^{1} 2^2\ (3j+1)$$

$$= 2\ (-3+1) \quad + \ 2\ (3\cdot 0+1) + 2\ (3+1)$$

$$+ 2^2 (-3+1) + 4\ (3\cdot\ 0+1) + \ 4\ (3+1)$$

$$= -4 \qquad + \qquad 2 \qquad + \qquad 8$$

$$-8 \qquad + \qquad 4 \qquad + \qquad 16 = 18$$

$$= \sum_{j=-1}^{1}\ \sum_{i=1}^{2} 2^i \cdot (3j+1)$$

---

**Produktzeichen**

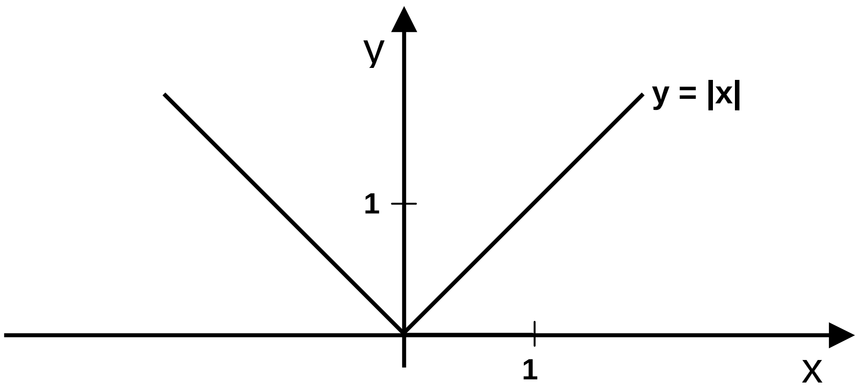
$\prod$ (wird analog benutzt)

Beispiel:

$$n\,! := \ 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ ...\ \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i$$

## 1.3 Der absolute Betrag einer reellen Zahl

Definition: $|\mathbf{x}| := \begin{cases} \mathbf{x}, & \text{wenn } \mathbf{x} \geq 0 \\ -\mathbf{x}, & \text{wenn } \mathbf{x} < 0 \end{cases}$ **absoluter Betrag** von $\mathbf{x} \in \mathbf{R}$




Folgerungen:

- $|\mathbf{x}| = \mathbf{max}\ \{\mathbf{x}, -\mathbf{x}\}$

- $\mathbf{x} \leq |\mathbf{x}|, \quad -\mathbf{x} \leq |\mathbf{x}|, \quad |-\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$

- Dreiecksungleichung: $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}$

  $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$

  Verallgemeinerung:

  $|\mathbf{x_1} + \ldots + \mathbf{x_n}| \leq |\mathbf{x_1}| + \ldots + |\mathbf{x_n}|$ (vollständige Induktion)

Ungleichungen mit Beträgen

(1) $|\mathbf{x}| \leq \mathbf{a} \leftrightarrow -\mathbf{a} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{a} \leftrightarrow \mathbf{x} \in [-\mathbf{a}, \mathbf{a}]$

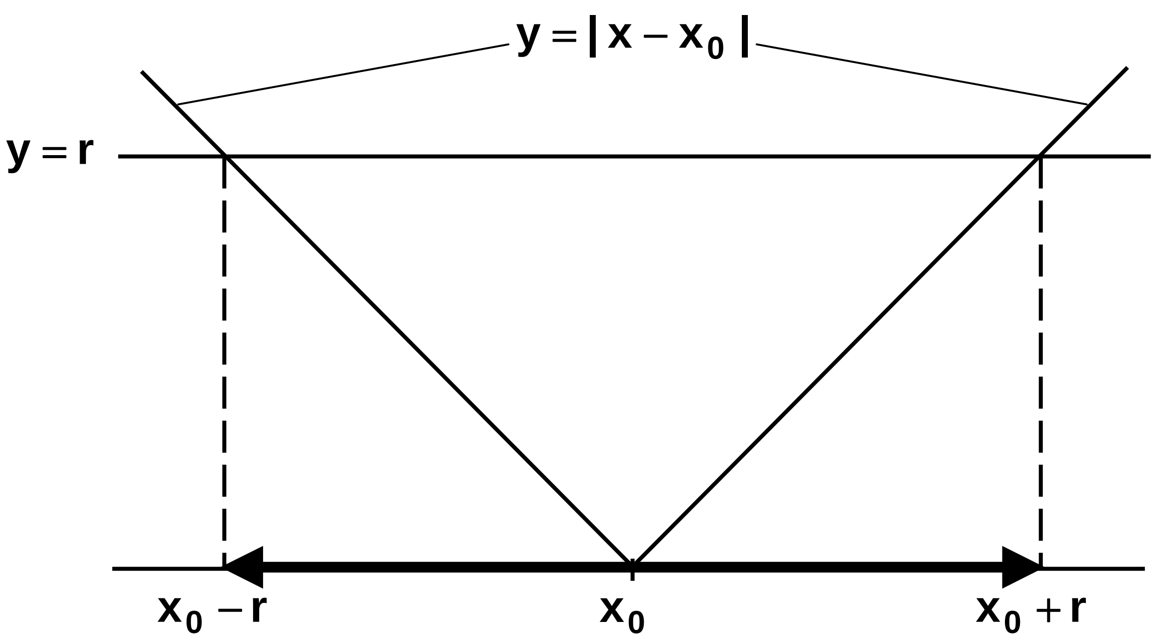
abgeschlossenes Intervall

(2) $\mathbf{r} > \mathbf{0}, \quad \{\mathbf{x} \in \mathbf{R} \mid |\mathbf{x} - \mathbf{x_0}| < \mathbf{r}\}$

$$= \{\mathbf{x} \in \mathbf{R} \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{x_0}, \mathbf{x} < \mathbf{x_0} + \mathbf{r}\} \cup \{\mathbf{x} \in \mathbf{R} \mid \mathbf{x} < \mathbf{x_0}, \mathbf{x} > \mathbf{x_0} - \mathbf{r}\}$$

$$= \{\mathbf{x} \in \mathbf{R} \mid -\mathbf{r} < \mathbf{x} - \mathbf{x_0} < \mathbf{r}\} = \{\times \in \mathbf{R} \mid \mathbf{x_0} - \mathbf{r} < \mathbf{x} < \mathbf{x_0} + \mathbf{r}\} = (\mathbf{x_0} - \mathbf{r}, \mathbf{x_0} + \mathbf{r})$$

offenes Intervall



## 1.4 Grenzwert

Fundamentale Idee in der Analyse

Anwendung: Ableitung einer Funktion; Elastizität

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

bedeutet: f (x) ist beliebig dicht bei b für alle x,
die dicht genug bei a liegen.

Was bedeutet **„dicht bei“**? $|x - a|$, $|f(x) - b|$ $\rightarrow$ klein,

also

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \text{g.d.w.} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \; |f(x) - b| < \varepsilon \quad \text{falls} \; |x - a| < \delta .}$$

Beispiele:

$$\lim_{x \to 3} 2x = 6,$$

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ existiert nicht ( $\frac{1}{x}$ ist eine große positive oder große negative Zahl)