Humboldt - Universität zu Berlin
Landwirtschaftlich-Gärtnerische Fakultät
Fachgebiet Agrarpolitik
Prof. Dr. Dr. h.c. Dieter Kirschke

Dr. K. Jechlitschka

AUFGABENSAMMLUNG

zur

Vorlesung Mathematik

Humboldt-Universität zu Berlin • Institut für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften des Landbaus • Fachgebiet Agrarpolitik
Luisenstr. 56 • D-10099 Berlin • Tel.: +(49)-30- 2093 6245 • Fax: +(49)-30- 2093 6301 • E-mail: jechlitschka@agrar.hu-berlin.de
http://www.agrar.hu-berlin.de/wisola/fg/apol

Inhaltsverzeichnis

1 Mengentheoretische und arithmetische Hilfsmittel

1.1 Mengenlehre

Graphische Darstellungen in der reellen Zahlenebene

Stellen Sie die folgenden Mengen graphisch dar:

1) $M_1 = \{(x_1, x_2) \in R^2;\ x_1 + x_2 + 1 = 0\}$

   Hinweis: R^2 bezeichnet die reelle Zahlenebene (ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit x_1-Achse und x_2-Achse). Die Menge aller Punkte (x_1, x_2), die der Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ (a_1, a_2, b reelle Zahlen) genügen, ist eine Gerade in der Zahlenebene.

2) $M_2 = \{(x_1, x_2) \in R^2;\ x_2 = 3x_1 + 4\}$

3) $M_3 = \{(x_1, x_2) \in R^2;\ x_1 = 5\}$

4) $M_4 = \{(x_1, x_2) \in R^2;\ x_2 = -3\}$

5) $M_5 = \{(x_1, x_2) \in R^2;\ -x_1 + x_2 \le 1\}$

   Hinweis: Die Menge aller Punkte $(x_1, x_2) \in R^2$, die der Ungleichung $a_1x_1 + a_2x_2 \le (\ge) b$; a_1, a_2, b reelle Zahlen, genügen, ist eine Halbebene H der reellen Zahlenebene. Um diese Halbebene H graphisch darzustellen, zeichnet man zunächst die Gerade $a_1x_1 + a_2x_2 = b$. Diese Gerade teilt die Zahlenebene in zwei Halbebenen, von denen eine die gesuchte Halbebene H ist. Um nun H zu bestimmen, wählt man sich einen beliebigen Probepunkt (x_{10}, x_{20}). Dieser Probepunkt darf nicht auf der Geraden $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ liegen. Nachdem man den Punkt (x_{10}, x_{20}) in das Koordinatensystem eingezeichnet hat, stellt man fest, ob dieser Punkt der Ungleichung genügt. Genauer: Gilt $a_1x_{10} + a_2x_{20} < (>) b$, so ist die Halbebene, in der der Probepunkt (x_{10}, x_{20}) liegt, die gesuchte Halbebene H. Gilt dagegen $a_1x_{10} + a_2x_{20} > (<) b$, so liegt der Punkt (x_{10}, x_{20}) nicht in der gesuchten Halbebene H. Dann ist die andere Halbebene, in der (x_{10}, x_{20}) nicht liegt, die Halbebene H.

6) $M_6 = \{(x_1, x_2) \in R^2;\ x_2 + 3x_1 \ge 6\}$

7) $M_7 = \{(x_1, x_2) \in R^2;\ -x_1 + x_2 \le 1,\ 2x_2 - x_1 \ge 4\}$

   Hinweis: Die Menge M_7 ist gleich der Menge aller derjenigen Punkte (x_1, x_2) der reellen Zahlenebene, die der Ungleichung $-x_1 + x_2 \le 1$ und gleichzeitig der Ungleichung $2x_2 - x_1 \ge 4$ genügen. Die Menge M_7 ist somit der Durchschnitt der beiden Halbebenen, die durch die beiden Ungleichungen beschrieben werden.

8) $M_8 = \{(x_1, x_2) \in R^2;\ x_2 + 3x_1 \ge 6,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\}$

9) $M_9 = \{(x_1, x_2) \in R^2;\ x_1 + x_2 + 1 \ge 0,\ x_1 - 2x_2 - 2 \ge 0,\ 2x_1 - x_2 - 4 \le 0\}$

10) $M_{10} = \{(x_1, x_2) \in R^2;\ x_1 + x_2 + 1 \ge 0,\ x_1 - 2x_2 - 2 \ge 0,\ x_2 - x_1 \ge 0\}$

1.2 Das Summenzeichen

1) Schreiben Sie folgende Summen aus und berechnen Sie sie.

a) $\sum_{i=1}^{7} i =$

b) $\sum_{k=1}^{3} 0{,}5 \cdot 2^{k} =$

c) $\sum_{i=1}^{4} 5 =$

d) $\sum_{i=0}^{3} \sum_{j=1}^{4} 2j(i+4) =$

e) $\sum_{n=-1}^{1} \sum_{k=2}^{4} (2+k)^{n} =$

2) Schreiben Sie die folgenden Summen mit Hilfe des Summenzeichens.

a) $\frac{c_1}{d_1} + \frac{c_2}{d_2} + \frac{c_3}{d_3} + \ldots + \frac{c_{10}}{d_{10}} =$

b) $(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+(a_3+b_3)^2+(a_4+b_4)^2+(a_5+b_5)^2=$

3) i=1, 2, 3 seien die verschlüsselten Bezeichnungen für 3 landwirtschaftliche Betriebe.
j=1, 2, 3, 4 seien die verschlüsselten Bezeichnungen für vier Verbraucher, die von den drei Betrieben direkt beliefert werden.
x_{ij} (dt) sei die Menge der Kartoffeln, die vom i-ten Betrieb zum j-ten Verbraucher geliefert wird.
k_{ij} (€/dt) seien die Kosten für den Transport einer dt Kartoffeln von dem i-ten landwirtschaftlichen Betrieb zum j-ten Verbraucher.

a) Stellen Sie die x_{ij} in einer Tabelle dar!

b) Geben Sie unter Verwendung von Summenzeichen die Formeln für die Zeilensummen Z an! Welche Bedeutung hat die erste Zeilensumme?

c) Geben Sie unter Verwendung von Summenzeichen die Formeln für die Spaltensumen S an. Welche Bedeutung hat die Spaltensumme S_3?

d) Stellen Sie die Gesamtmenge der zu transportierenden Kartoffeln mit Hilfe der Summe über die Spaltensummen und mit Hilfe des Doppelsummenzeichens dar!

e) Welche Bedeutung hat der Ausdruck $p_{ij}=k_{ij}x_{ij}$?
Welche Maßeinheit besitzt er?

f) Bilden Sie eine analoge Tabelle für die p_{ij}!

g) Stellen sie eine Formel für die Summe P aller p_{ij} auf. Nutzen Sie das Doppelsummenzeichen. Welche Bedeutung hat P?

h) Wie hoch sind die Transportkosten der Kartoffeln, die insgesamt von den Betrieben 2 und 3 an die Verbraucher 1 und 2 geliefert werden?

i) Berechnen Sie alle oben genannten Größen für die folgenden Ausgangsdaten:

x_{ij}:

Verbraucher

Betriebe	**1**	**2**	**3**	**4**
1	12	0	20	15
2	8	30	16	2
3	10	6	11	13

k_{ij}:

Verbraucher

Betriebe	**1**	**2**	**3**	**4**
1	20	62	57	50
2	48	25	30	80
3	78	75	40	45

4) x_i seien Meßwerte, i=1,..., n.

a) Welche Bedeutung hat $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$?

b) Zeigen Sie unter Verwendung der Gleichung $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, daß

$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n(\overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$ gilt.

5) Ein wichtiger Teil der Statistik- und Biometrieausbildung ist die Varianzanalyse. Dabei müssen verschiedene Doppelsummen berechnet werden. Die folgende Tabelle enthält Erträge (in kg) von fünf Sorten Tomaten auf jeweils 4 Teilstücken.
Berechnen Sie mit Hilfe der Tabellenwerte die unten angegebenen Doppelsummen. Dabei bezeichnet i die Nummer der Sorte (i=1,..., 5); n bezeichnet die Nummer des Teilstücks (n=1,...,4); x_{in} ist der Ertrag der i-ten Sorte auf dem n-ten Teilstück.

x_{in}:

n

i	**1**	**2**	**3**	**4**
1	5,3	4,9	4,4	5,4
2	5,0	4,6	4,1	5,3
3	4,7	4,4	3,8	5,2
4	4,4	4,2	3,5	5,1
5	4,4	4,2	3,7	4,2

a) $\sum_i \sum_n x_{in}$

b) $\sum_i \sum_n x_{in}{}^2$

c) $(\sum_i \sum_n x_{in})^2$

d) $\sum_i (\sum_n x_{in})^2$

e) $\sum_n (\sum_i x_{in})^2$

Lösungen

1a) 28; b) 7; c) 20; d) 440; e) $18\frac{37}{60}$

2a) $\sum_{i=1}^{10} \frac{c_i}{d_i}$ b) $\sum_{i=1}^{5} (a_i+b_i)^2$

3b) $Z_1 = \sum_{j=1}^{4} x_{1j}$ c) $S_1 = \sum_{i=1}^{3} x_{i1}$ d) Gesamtmenge $M = \sum_{j=1}^{4} S_j = \sum_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{3} x_{ij}$

h) $p_{21}+p_{22}+p_{31}+p_{32}$

i) $Z_1=47$, $S_1=30$, M=143, P=6159,

Kosten des Transports von den Betrieben 2 und 3 zu den Verbrauchern 1 und 2: 2364 €

5a) 90,8 b) 418,20 c) 8244,64 d) 1656,7 e) 2079,02

2 Elemente der Analysis

2.1 Differentialrechnung

Bilden Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

Lösungen

1) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 4x - 2$

$f'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 4$

2) $f(\mathrm{x}) = \left(\mathrm{x}^2 - \frac{3}{\mathrm{x}}\right) \cdot \left(\mathrm{x}^2 + \frac{1}{\mathrm{x}}\right)$

$$f'(x) = \left(2x + \frac{3}{x^2}\right) \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) + \left(x^2 - \frac{3}{x}\right) \cdot \left(2x - \frac{1}{x^2}\right)$$
$$= 4x^3 + \frac{6}{x^3} - 2$$

3) $f(x) = (1 - ax)^4$

$f'(x) = -4(1 - ax)^3 \cdot a$

4) $f(x) = -3 \cdot \frac{1 - 2x}{\left(x^2 - 4\right)}$

$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 6x - 24}{\left(x^2 - 4\right)^2}$$

5) $f(x) = \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)}$

$$f'(x) = 2\sin(x) + \frac{\sin(x)^3}{\cos(x)^2}$$

6) $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{\cos(x)}$

$$f'(x) = 2\cos(x^2)\frac{x}{\cos(x)} + \frac{\sin(x^2)}{\cos(x)^2}\sin(x)$$

7) $\sin(x) - x\cos(x)$

$f'(x) = x\sin(x)$

8) $f(x) = \frac{x}{a^x}$

$$f'(x) = \frac{1}{\left(a^x\right)} - \frac{x}{\left(a^x\right)}\ln(a) = a^{(-x)} - xa^{(-x)}\ln(a)$$

9) $f(x) = e^x x^n$

$f'(x) = e^x x^n + e^x x^{(n-1)} n$

10) $f(x) = \cos\left(e^{\frac{1-x}{1+x}}\right)$

$$f'(x) = -\sin\left(e^{\frac{1-x}{1+x}}\right)\left[\frac{-1}{(1+x)} - \frac{(1-x)}{(1+x)^2}\right]e^{\frac{1-x}{1+x}}$$

11) $f(x) = b \cdot e^{\sin(ax) - d}$

12) $f(x) = x^n \ln(x)$

13) $f(x) = x^2 \log_{10}(x)$

<u>Hinweis</u>: Es gilt $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$

$f'(x) = b \cdot \cos(ax)\, a \cdot e^{\sin(ax) - d}$

$f'(x) = n \cdot x^{n-1} \cdot \ln(x) + x^{n-1}$

$f'(x) = 2x \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)} + \dfrac{x}{\ln(10)} = 2x \log_{10}(x) + \dfrac{x}{\ln(10)}$

2.2 Integralrechnung

Bestimmen Sie die Menge aller Stammfunktionen folgender Funktionen:

1) $f(x) = ax^3 + bx + \dfrac{d}{x}$

2) $f(x) = \dfrac{1}{x^n} \quad , \quad n \neq 1$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x^n} \quad , \quad n = 1$

4) $f(x) = \sqrt{1 - \cos(x)^2}$

5) $f(x) = \dfrac{x^3 - 5x^2 + 12x - 12}{x - 2} \qquad x \neq 2$

6) $f(x) = \cot(x)$

<u>Hinweis</u>: $\cot(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$

7) $f(x) = \dfrac{2x - 5}{x^2 - 5x + 7}$

Lösungen

$\int f(x)dx = \dfrac{1}{4}ax^4 + \dfrac{1}{2}bx^2 + d \cdot \ln(x) + c \ ; \ c \in R$

$\int f(x)dx = \dfrac{-1}{(n-1)} \cdot x^{(-n+1)} + c$

$\int f(x)dx = \ln x + c$

$\int f(x)dx = -\cos(x) + c$

$\int f(x)dx = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 6x + c$

$\int f(x)dx = \ln\left|\sin(x)\right| + c$

$\int f(x)dx = \ln\left|x^2 - 5x + 7\right| + c$

Berechnen Sie die bestimmten Integrale.

8) $\int_0^3 2x + 3x^2 dx =$	36
9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx =$	1
10) $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$	$2 \cdot \sqrt{2} - 2$
11) $\int_1^1 e^{2x} dx =$	0
12) Welchen Flächeninhalt schließen die Kurven der beiden Funktionen f(x)=x^2 und g(x)=2x ein? $\int_0^2 g(x) - f(x) dx =$	1,333

2.3 Partielle Differentiation

1) Bilden Sie $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}$ von den folgenden Funktionen.

a) $f(x_1, x_2) = x_1+x_2$

b) $f(x_1, x_2) = 3+5x_1+2x_2$

c) $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$

d) $f(x_1, x_2) = (3+3x_1)(4-7x_2)$

e) $f(x_1, x_2) = -4x_1^2-x_2^2+3x_1x_2-2x_1-3x_2-4$

f) $f(x_1, x_2) = x_1^2(14x_1+6x_2)$

g) $f(x_1, x_2) =. \frac{3x_1}{2x_2}+23$ $\qquad x_2 \neq 0$

h) $f(x_1, x_2) = x_1^3 \sin(x_2)+ x_1^2(1- x_2^3)^2$

i) $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot e^{-(x_2+1)}$

2) Untersuchen Sie die unten angegebenen Funktionen $f(x_1, x_2)$ auf Extremwerte. Gehen Sie dabei in folgenden Schritten vor:

1. Bilden Sie $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}$

2. Bestimmen Sie die stationären Punkte $(x_{1E}, x_{2E}) \in R^2$. Das sind diejenigen Punkte $(x_{1E}, x_{2E}) \in R^2$, für die gilt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{1E}, x_{2E}) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{1E}, x_{2E}) = 0 \end{aligned}\right\}$$

Unter den stationären Punkten einer Funktion $f(x_1, x_2)$ sind diejenigen Punkte, bei denen die Funktion ein lokales Extremum besitzt. Es muß nun für jeden stationären Punkt untersucht werden, ob er ein lokales Extremum ist oder nicht. Falls keine stationären Punkte vorhanden sind, besitzt die Funktion keine lokalen Extrema.

3. Bilden Sie (falls es stationäre Punkte gibt) die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}$$

4. Berechnen Sie für jeden stationären Punkt (x_{1E}, x_{2E}) die folgenden Größen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x_{1E}, x_{2E}) = f_{x_1 x_1}(x_{1E}, x_{2E}) = a_{11}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_{1E}, x_{2E}) = f_{x_1 x_2}(x_{1E}, x_{2E}) = a_{12}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(x_{1E}, x_{2E}) = f_{x_2 x_2}(x_{1E}, x_{2E}) = a_{22}$$

Gilt nun $D=a_{11} \cdot a_{22}-(a_{12})^2 > 0$, dann besitzt die Funktion $f(x_1, x_2)$ im Punkt (x_{1E}, x_{2E}) ein lokales Extremum und zwar: falls $a_{11} > 0$ ein Minimum, falls $a_{11} < 0$ ein Maximum. Gilt andererseits $D=a_{11} \cdot a_{22}-(a_{12})^2 < 0$, so hat die Funktion $f(x_1, x_2)$ im Punkt (x_{1E}, x_{2E}) kein Extremum.

a) $f(x_1, x_2) = 3+2x_1+20x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_1x_2$

b) $f(x_1, x_2) = 9x_1^2+6x_1x_2+ 9x_2^2$

c) $f(x_1, x_2) =3x_1^3+2x_1 - 4x_2^2+x_2 - x_1x_2$

d) $f(x_1, x_2) = 3x_1 \cdot x_2^2 - x_1^2 - 6x_2^2 - 8x_1$

e) $f(x_1, x_2) = e^{-(x_1-3)^2-(x_2+4)^2}$

Lösungen

2a) Die Funktion besitzt einen stationären Punkt $x_{1E} = 52$, $x_{2E} = -34$. In diesem Punkt liegt kein Extremum vor.

b) Im Punkt $x_1=0$, $x_2=0$ besitzt die Funktion ein relatives Minimum.

c) Die Funktion $f(x_1, x_2)$ besitzt keine stationären Punkte.

d) Die Funktion besitzt drei stationäre Punkte: (-4, 0); (2, 2); (2, -2). $f(x_1, x_2)$ hat in (-4, 0) ein relatives Maximum und besitzt in den anderen beiden stationären Punkten kein Extremum.

e) $f(x_1, x_2)$ besitzt in dem einzigen stationären Punkt (3, -4) ein relatives Maximum.

3 Elemente der Linearen Algebra

3.1 Elementare Matrizenoperationen

1) Bestimmen Sie den Typ der folgenden Matrizen.

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 7 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \underline{d} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 1/8 \end{pmatrix} \qquad \underline{e} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

2) Transponieren Sie die folgenden Matrizen. Welchen Typ hat die transponierte Matrix?

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{d} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{c} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

3) Welche der folgenden Matrizen können Sie addieren? Führen Sie die möglichen Matrizenadditionen aus.

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \underline{a} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \end{pmatrix}, \qquad \underline{B} = \begin{pmatrix} 17 & -10 & 13 \\ 0 & 7 & 2 \\ 23 & 5 & -8 \\ 33 & -11 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 13 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 1{,}5 \end{pmatrix} \quad \underline{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 0 & -4 & 2{,}5 \\ -41 & 17 & 23 \\ -3 & 28 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{D} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4) Multiplizieren Sie die gegebene Matrix mit der rellen Zahl α .

a) $\alpha=4$, $\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 10 \end{pmatrix}$

b) $\alpha=3$, $\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & 9 \\ -3 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\alpha = 1/2$ $\underline{b} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}^T$

5) Stellen Sie die Matrix A in der Form A=$\alpha \cdot$B dar, so daß $\alpha \in R$ und die Matrix B nur ganzzahlige Elemente enthält.

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/12 & 1/6 \\ 1/4 & 1/8 & -1/24 \end{pmatrix}$$

6) In einem landwirtschaftlichen Betrieb wird die benötigte Maschinenzeit auf vier Maschinen durch den Vektor

$$\underline{t} = \begin{pmatrix} 450 \\ 500 \\ 1000 \\ 740 \end{pmatrix},$$

die zur Verfügung stehende Maschinenzeit durch den Vektor

$\underline{b} = \begin{pmatrix} 500 \\ 600 \\ 1000 \\ 750 \end{pmatrix}$ angegeben.

Bestimmen Sie die verbleibende Maschinenzeit r.

7) Vier Betriebe beliefern drei Abnehmer monatlich:

	Abnehmer		
Betrieb	**1**	**2**	**3**
1	300	200	0
2	250	100	300
3	200	170	100
4	0	420	210

Bestimmen Sie die Jahreslieferung.

8) Welchen Typ besitzt die Matrix X̲? Lösen Sie die folgende Matrizengleichung.

$$3\begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -4/6 & 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^T = \underline{X}$$

9) Welchen Typ besitzt X̲? Lösen Sie folgende Matrizengleichung.

$$\frac{1}{4}\underline{X} - \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 \\ 0 & 19 & 3 \end{pmatrix}$$

10) Bestimmen Sie reelle Zahlen a und b so, daß die folgende Vektorgleichung erfüllt ist.

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Matrizenmultiplikation - Wirtschaftliche Verflechtungen

11) Welchen Typ haben die Matrizen A̲ und B̲? Lassen sich die angegebenen Produkte bilden? Geben Sie den Typ der Produktmatrix an und berechnen Sie diese, falls dies möglich ist.

a) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\underline{A}\cdot\underline{B}$, $\underline{B}\cdot\underline{A}$

b) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\underline{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\underline{A}\cdot\underline{B}$, $\underline{B}\cdot\underline{A}$

c) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\underline{A}\cdot\underline{b}$, $\underline{b}\cdot\underline{A}$

d) $\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\underline{a}\cdot\underline{b}$, $\underline{b}\cdot\underline{a}$

12) Berechnen Sie $\underline{A}\cdot\underline{A}^T$ für $\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

13) Der Vektor $\underline{x}$ sei $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie den Typ von $\underline{x}$.

a) Welchen Typ hat das Produkt $\underline{A}\cdot\underline{x}$, wobei $\underline{A}$ die Matrix aus Aufgabe 12) ist?

b) Berechnen Sie $\underline{A}\cdot\underline{x}$!

14) Geben Sie eine Matrix $\underline{A}$ mit Typ ($\underline{A}$) = (2, 3) und eine Matrix $\underline{B}$ mit Typ ($\underline{B}$) = (4, 2) an. Bilden Sie das mögliche Matrizenprodukt ($\underline{A}\cdot\underline{B}$, $\underline{B}\cdot\underline{A}$).

15) In einem Betrieb werden aus vier Rohstoffen drei Zwischenprodukte hergestellt. Aus diesen entstehen in der zweiten Produktionsstufe fünf Endprodukte.

a) Es ist die Rohstoffverbrauchsmatrix je Einheit der Endprodukte aufzustellen.

b) Welche Rohstoffmengen sind bereitzustellen, wenn der Betrieb den Endproduktvektor

$\underline{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 400 \\ 50 \\ 500 \end{pmatrix}$ realisieren will?

Der Materialverbrauch von Produktionsstufe zu Produktionsstufe ist aus den folgenden Tabellen ersichtlich:

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	2	1	4
R_2	0	5	3
R_3	3	2	0
R_4	4	1	2

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
Z_1	1	4	0	2	3
Z_2	2	1	6	3	0
Z_3	4	5	1	1	4

16) Welchen Typ hat $\underline{X}$? Bestimmen Sie die unbekannte Matrix $\underline{X}$!

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \underline{X} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

17) Untersuchen Sie, welche Matrizen miteinander multiplizierbar sind. Berechnen Sie einige Matrizenprodukte.

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \underline{c}^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{D} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \underline{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{H} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{G} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 8 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & 0 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{N} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ -12 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Lösungen

5) $\underline{A} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 6 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

6) $\underline{r} = \underline{b} - \underline{t} = \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$

7)

	Abnehmer		
Betrieb	**1**	**2**	**3**
1	3600	2400	0
2	3000	1200	3600
3	2400	2040	1200
4	0	5040	2520

8) Typ($\underline{X}$)=(2,2), $\underline{X} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 7/2 \end{pmatrix}$

9) Typ($\underline{X}$)=(2,3), $\underline{X} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & -16 \\ 16 & 88 & 16 \end{pmatrix}$

10) $a = \frac{10}{3} \qquad b = \frac{-11}{3}$

11a) $\underline{A}\cdot\underline{B}=\begin{pmatrix}3 & -1\\5 & -1\end{pmatrix}$ $\underline{B}\cdot\underline{A}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\5 & 3\end{pmatrix}$ b) $\underline{A}\cdot\underline{B}=\begin{pmatrix}9 & 3\\10 & 3\end{pmatrix}$ $\underline{B}\cdot\underline{A}=\begin{pmatrix}9 & 3 & 4\\7 & 2 & 3\\2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

c) $\underline{A}\cdot\underline{b}=\begin{pmatrix}10\\8\end{pmatrix}$ d) $\underline{a}\cdot\underline{b}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\1 & 2 & 3\\3 & 6 & 9\end{pmatrix}$ $\underline{b}\cdot\underline{a}=13$

12) $\underline{A}\cdot\underline{A}^T=\begin{pmatrix}18 & 21\\21 & 27\end{pmatrix}$

13) Typ ($\underline{x}$) = (4,1) $\underline{A}\cdot\underline{x}=\begin{pmatrix}3x_1+2x_2+x_3+2x_4\\4x_1+x_2+x_3+3x_4\end{pmatrix}$ Typ ($\underline{A}\cdot\underline{x}$) = (2,1)

15a) $\begin{pmatrix}20 & 29 & 10 & 11 & 22\\22 & 20 & 33 & 18 & 12\\7 & 14 & 12 & 12 & 9\\14 & 27 & 8 & 13 & 20\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}R_1\\R_2\\R_3\\R_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23350\\26300\\13400\\20650\end{pmatrix}$

16) Typ ($\underline{X}$) = (2,2) $\underline{X}=\begin{pmatrix}2 & -23\\0 & 8\end{pmatrix}$

3.2 Lineare Unabhängigkeit - Basis eines Vektorraumes

1) Bestimmen Sie den Vektor $\underline{x}$, der eine Linearkombination der Vektoren $\underline{a}_1=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ und $\underline{a}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ mit den Koeffizienten $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$ ist. Welche Dimension hat der Vektor $\underline{x}$?

2) Bestimmen Sie den Vektor $\underline{x}$, der eine Linearkombination der Vektoren

$\underline{a}_1=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ $\underline{a}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\underline{a}_3=\begin{pmatrix}-7\\4\\3\end{pmatrix}$ mit den Koeffizienten

$\lambda_1=1$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=-1$ ist. Welche Dimension hat der Vektor $\underline{x}$?

3) Für welche λ_1 und λ_2 ist der Vektor $\underline{c}$ eine Linearkombination der Vektoren $\underline{a_1}$ und $\underline{a_2}$?

a) $\underline{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\underline{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\underline{c}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

b) $\underline{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\underline{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\underline{c}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ $a,b\in R$

c) $\underline{a}_1=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ $\underline{a}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $\underline{c}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

d) $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\underline{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

4) Sind die folgenden Vektormengen linear abhängig oder linear unabhängig? Untersuchen Sie es graphisch und rechnerisch.

a) $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\underline{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

5) Untersuchen Sie die folgenden Vektoren auf lineare Unabhängigkeit.

a) $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

6) Zeigen Sie, daß die Vektoren

$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

eine Basis des dreidimensionalen Vektorraumes sind.

Lösungen

1) $\underline{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

2) $\underline{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

3a) $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 2$ b) $\lambda_1 = a,\ \lambda_2 = b$ c) $\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 8$ d) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1$

4a) $\underline{a}_1$ und $\underline{a}_2$ sind linear unabhängig b) $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$ und $\underline{a}_3$ sind linear abhängig

5a) linear unabhängig b) linear unabhängig

6) $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$ und $\underline{a}_3$ sind linear unabhängig.

3.3 Elementare Basistransformation (BT)

Koordinaten eines Vektors in einer Basis

1) Lösen Sie obige Aufgabe 4), Kapitel 3.2 mit Hilfe elementarer BT.

2) Lösen Sie obige Aufgabe 6), Kapitel 3.2 mit Hilfe elementarer BT.

3) Untersuchen Sie die folgenden Vektormengen auf lineare Unabhängigkeit mit Hilfe elementarer BT.

a) $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\underline{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underline{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

4) Zeigen Sie, daß $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ eine Basis in R^2 bilden. Geben Sie die Koordinaten der folgenden Vektoren in dieser Basis an.

Hinweis: Die Koordinaten eines Vektors in einer gegebenen Basis $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$ sind die Koeffizienten λ_1 und λ_2 der Linearkombination dieses Vektors aus den Basisvektoren $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$.

a) $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ c) $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ d) $\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e) $\underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

5) Zeigen Sie, daß die Vektoren $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$ und $\underline{a}_3$ eine Basis in R^3 sind.

$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Geben Sie die Koordinaten der folgenden Vektoren in der Basis $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$ und $\underline{a}_3$ an.

a) $\underline{a}_1$ b) $\underline{a}_2$ c) $\underline{a}_3$

d) $\underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ e) $\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ f) $\underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ g) $\underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Rangbestimmung von Matrizen

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen.

6) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ 7) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$ 8) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

9) $\underline{A} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -1/2 \\ 3 & 6 & -3/2 \end{pmatrix}$ 10) $\underline{A} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ 11) $\underline{a} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

12) $\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

13) Geben Sie je eine Matrix vom Typ (3,4) an, die

a) den Rang 1 besitzt,

b) den Rang 2 besitzt.

Lösungen

3a) linear abhängig b) linear abhängig c) linear unabhängig

4) $\underline{a_1}$, $\underline{a_2}$ sind linear unabhängig und bilden somit eine Basis des zweidimensionalen Vektorraumes.

a) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0,$ b) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1$ c) $\lambda_1 = -5,\ \lambda_2 = 3$

d) $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -1$ e) $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 1$

5) $\underline{a_1}$, $\underline{a_2}$ und $\underline{a_3}$ sind linear unabhängig und bilden somit eine Basis.

a) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0$ b) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 0$ c) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 1$

d) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 1$ e) $\lambda_1 = 1/3,\ \lambda_2 = -2/3,\ \lambda_3 = 1/3$

f) $\lambda_1 = -2/3,\ \lambda_2 = 4/3,\ \lambda_3 = 1/3$ g) $\lambda_1 = 4/3,\ \lambda_2 = -5/3,\ \lambda_3 = -2/3$

6) r ($\underline{A}$) = 2

7) r ($\underline{A}$) = 1

8) r ($\underline{A}$) = 3

9) r ($\underline{A}$) = 1

10) r ($\underline{A}$) = 2

11) r ($\underline{a}$) = 1

12) r ($\underline{a}$) = 1

3.4 Lineare Gleichungssysteme

Lösen Sie die unten angegebenen linearen Gleichungssysteme mit Hilfe elementarer BT in den folgenden Schritten:

- Darstellung des linearen Gleichungssystems in Vektorschreibweise (d.h. Vektoren $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$,..., $\underline{b}$ bestimmen)
- Anfangstabelle erstellen
- elem. BT mit den Vektoren $\underline{a}_i$ durchführen bis zur Endtabelle
- Bestimmen von: r ($\underline{A}$), r ($\underline{A}$, $\underline{b}$) und Untersuchung des Gleichungssystems auf Lösbarkeit
- im Falle der Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems die Lösung angeben
- im Falle unendlich vieler Lösungen: die allgemeine Lösung und zwei spezielle Lösungen angeben.

1) $4x_1 + 3x_2 = 10$
$-x_1 + 5x_2 = 9$

2) $2x_1 + 4x_2 = 6$
$4x_1 + 8x_2 = 10$

3) $2x_1 + 4x_2 = 6$
$4x_1 + 8x_2 = 12$

4) $x_2 + x_3 = 3$
$x_1 + x_3 = 3$
$-x_1 + x_2 = 0$

5) $x_1 + 2x_3 = 2$
$x_1 + x_2 = 3$
$3x_1 + x_2 + x_3 = 4$

6) $x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$
$-x_2 + 2x_3 = -4$
$x_1 + x_2 = 3$

7) $x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1$
$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1$
$x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5$

8) $2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1$
$x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2$
$x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = 1$

9) Das lineare Gleichungssystem

$$x_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\underline{a}_1} + x_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\underline{a}_2} + x_3 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{a}_3} + x_4 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -13 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix}}_{\underline{a}_4} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\underline{b}}$$

hat nach 2 elementaren BT die folgende Tabelle:

	$\underline{e}_1$	$\underline{e}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{b}$
$\underline{a}_1$	1	0	2	-2	-1
$\underline{a}_2$	$-1/2$	$1/4$	-1	3	1
$\underline{e}_3$	$-3/2$	$5/4$	0	0	0
$\underline{e}_4$	2	-1	0	0	0
$\underline{e}_5$	$-1/2$	$-5/4$	0	0	0

Geben Sie die Lösung dieses linearen Gleichungssystems an.

10) Geben Sie mindestens ein lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 2 Variablen an, das die Lösung $x_1 = 2$ und $x_2 = -1$ hat.

Lösungen

1) $x_1 = 1, \quad x_2 = 2$

2) keine Lösungen

3) $x_1 = 3 - 2x_2, \quad x_2 \in R$ beliebig;
spezielle Lösungen: z.B. a) $x_2 = 0, \; x_1 = 3$, b) $x_2 = 4, \; x_1 = -5$

4) $x_1 = 3 - x_3, \quad x_2 = 3 - x_3, \quad x_3 \in R$ beliebig

5) $x_1 = 0, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 1$

6) $x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -1$

7) $x_1 = 2x_2 - x_3, \quad x_4 = 1, \quad x_2, x_3 \in R$ beliebig

8) keine Lösung

9) $x_1 = -1 - 2x_3 + 2x_4 \quad x_2 = 1 + x_3 - 3x_4 \quad x_3, x_4 \in R$ beliebig

3.5 Inverse Matrix

Bestimmen Sie zu den folgenden Matrizen die Inversen. Überprüfen Sie durch Matrizenmultiplikation ihr Ergebnis.

1) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

2) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & -8 & -4 \end{pmatrix}$

3) Hinweis: Siehe Aufgabe 1), Kapitel 3.4

$\underline{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

4) Hinweis: Siehe Aufgabe 5), Kapitel 3.4

$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5) Hinweis: Siehe Aufgabe 6), Kapitel 3.4

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6) Zu welcher Matrix $\underline{B}$ ist die Matrix

$$\underline{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ die Inverse?}$$

7) Lösen Sie die Aufgabe 16) aus Kapitel 3.1 über Matrizeninvertierung!

Lösungen

1) $$\underline{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & 3/7 \\ 2/7 & -1/7 \end{pmatrix}$$

2) $$\underline{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3) $$\underline{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 5/23 & -3/23 \\ 1/23 & 4/23 \end{pmatrix}$$

4) $$\underline{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 5/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

5) $$\underline{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2/5 & 1/5 & 7/5 \\ 2/5 & -1/5 & -2/5 \\ 1/5 & 2/5 & -1/5 \end{pmatrix}$$

6) $$\underline{B} = \left(\underline{B}^{-1}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3.6 Lineare Optimierung

Lösen Sie folgende lineare Optimierungsaufgaben:

a) geometrisch

b) rechnerisch mit der Simplexmethode

1) $\max\left\{x_1+2x_2 \,\middle|\, x_1+x_2\le 1,\ 2x_1-2x_2\le 1,\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\right\}$

2) $\max\left\{2x_1+x_2 \,\middle|\, -2x_1+x_2\le 1,\ x_1-2x_2\le 1,\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\right\}$

3) $\max\left\{5x_1+3x_2 \,\middle|\, 3x_1+5x_2\le 15,\ 5x_1+2x_2\le 10,\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\right\}$

4) $$\max\left\{x_1+3x_2 \,\middle|\, \begin{array}{l} x_1-x_2\le 1 \\ 2x_1+x_2\le 2, \quad x_1\ge 0,\ x_2\ge 0 \\ x_1-x_2\ge 0, \end{array}\right\}$$

5) $\min\left\{2x_1-3x_2 \,\middle|\, -3x_1+x_2\le 1,\ 2x_1+x_2\le 6,\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\right\}$

6) $$\max\left\{x_1+x_2 \,\middle|\, \begin{array}{l} x_1+3x_2\le 9 \\ 2x_1-x_2\le 2, \quad x_1\ge 0,\ x_2\ge 0 \\ x_1-2x_2\ge 2, \end{array}\right\}$$

Lösungen

1) Das Maximum der Funktion f wird im Punkt $x_1=0$, $x_2=1$ angenommen und beträgt 2.

2) Die Menge der zulässigen Punkte ist ein unbeschränktes konvexes Polyeder, und es existiert keine Maximallösung. (In Richtung der Zielfunktion ist die Menge der zulässigen Punkte unbeschränkt.)

3) Das Maximum der Funktion f wird im Punkt $x_1=\frac{20}{19}$, $x_2=\frac{45}{19}$ angenommen und beträgt $\frac{235}{19}$.

4) Das Maximum wird im Punkt $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=\frac{2}{3}$ angenommen und beträgt $\frac{8}{3}$.

5) Das Minimum der Funktion $f(x_1, x_2)$ wird im Punkt $x_1=1$, $x_2=4$ angenommen und beträgt -10.

6) Die Menge der zulässigen Punkte ist leer, es existiert somit keine Lösung.