3.5 Die Inverse einer quadratischen Matrix

Definition: Existiert zu einer quadratischen Matrix $\underline{A}$ eine Matrix $\underline{A}^{-1}$, so dass $\underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} = \underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{E}$ gilt, so heißt $\underline{A}^{-1}$ die **Inverse** von $\underline{A}$.

Zu einer regulären Matrix existiert genau eine Inverse. Existiert die Inverse einer Matrix, so ist diese Matrix regulär.

$\underline{E}^{-1} \quad = \underline{E}$

$(\underline{A}^{-1})^{-1} = \underline{A}$

Berechnung der Inversen mit elementarer BT
(es gibt auch andere Methoden, die wir hier nicht behandeln: Gaußsche Algorithmus, Determinanten-Methode):

$$\begin{array}{c|ccc} & \underline{a}_1 & \cdots & \underline{a}_n \\ \hline \underline{e}_1 & & & \\ \vdots & & \underline{A} & \\ \underline{e}_n & & & \end{array} \quad \xrightarrow[\text{Ordnen der Vektoren}]{\text{n elem. BT und}} \quad \begin{array}{c|ccc} & \underline{e}_1 & \cdots & \underline{e}_n \\ \hline \underline{a}_1 & & & \\ \vdots & & \underline{A}^{-1} & \\ \underline{a}_n & & & \end{array}$$

Beispiele:

1) $\underline{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{5} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

$$
\begin{array}{c|cc}
 & \underline{a}_1 & \underline{a}_2 \\
\hline
\underline{e}_1 & 4 & 2 \\
\underline{e}_2 & 5 & 3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cc}
 & \underline{a}_1 & \underline{e}_1 \\
\hline
\underline{a}_2 & 2 & 1/2 \\
\underline{e}_2 & -1 & -3/2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cc}
 & \underline{e}_2 & \underline{e}_1 \\
\hline
\underline{a}_2 & 2 & -5/2 \\
\underline{a}_1 & -1 & 3/2
\end{array}
\xrightarrow[\text{nen}]{\text{Ord-}}
\begin{array}{c|cc}
 & \underline{e}_1 & \underline{e}_2 \\
\hline
\underline{a}_1 & 3/2 & -1 \\
\underline{a}_2 & -5/2 & 2
\end{array}
$$

Also $\underline{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{3/2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-5/2} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ (Probe!)

2) $\underline{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{0} & \mathbf{1/2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

Vergleiche mit der Koeffizientenmatrix des ersten LGS im Abschnitt 3.4!

Ordnen $\Rightarrow$ $\underline{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1/2} & \mathbf{0} & \mathbf{-1/2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$ (Probe $\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = ?$)

Matrizengleichungen mit der Inversen

- LGS $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$

  (1) $\underline{A}$ ist regulär, $\rho(\underline{A}) = n$, $\underline{x} \in R^{\mathbf{n}}$:

  Es existiert $\underline{A}^{-1}$ und
  $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$ ist äquivalent zu
  $\underbrace{\underline{A}^{-1}\,\underline{A}}_{\underline{E}}\,\underline{x} = \underline{A}^{-1}\, b$, d.h. $\underline{x} = \underline{A}^{-1}\,\underline{b}$ ist die einzige Lösung des LGS

  (2) $\underline{A}$ ist eine (r, n)-Matrix mit $\rho(\underline{A}) = \rho(\underline{A},\underline{b}) = r < n$:

  wir zerlegen $\underline{A}$ und $\underline{x}$ (durch entsprechendes Vertauschen von Spalten und Variablen) in
  $\underline{A} = (\underline{B}, \underline{N})$, so dass $\underline{B}$ eine reguläre Matrix ist, und
  $\underline{x}$ entsprechend in $\underline{x}_B$ und $\underline{x}_N$.

  Aus $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$ bzw.
  $\underline{B}\,\underline{x}_B + \underline{N}\,\underline{x}_N = \underline{b}$ folgt dann durch Multiplikation mit $\underline{B}^{-1}$ von links
  $\underline{B}^{-1}\,\underline{B}\,\underline{x}_B + \underline{B}^{-1}\,\underline{N}\,\underline{x}_N = \underline{B}^{-1}\,\underline{b}$ bzw.
  $\underline{x}_B = \underline{B}^{-1}\,\underline{b} - \underline{B}^{-1}\,\underline{N}\,\underline{x}_N$.

  Damit haben wir eine Darstellung der Basisvariablen $\underline{x}_B$ durch die Nichtbasisvariablen $\underline{x}_N$, die der allgemeinen Lösung des LGS entspricht.

- Input / Output-Analyse (Teil 2)
  $(\underline{E} - \underline{A})\, \underline{x} = \underline{\mathbf{y}}$

  (a) $\underline{x}$ gegeben, $\underline{y}$ gesucht: Matrizenmultiplikation $\underline{y} = (\underline{E} - \underline{A})\, \underline{x}$

  (b) $\underline{y}$ gegeben, $\underline{x}$ gesucht: $\underline{x} = (\underline{E} - \underline{A})^{-1}\, \underline{y}$,
  d.h. wir müssen die Inverse von $\underline{E} - \underline{A}$ berechnen.