3.4 Lineare Gleichungssysteme

Definition: Ein System,

$$
\begin{array}{llllll}
\mathbf{a_{11}\,x_1} & + \mathbf{a_{12}\,x_2} & + & \mathbf{...} & + \mathbf{a_{1n}\,x_n} & = \mathbf{b_1} \\
\mathbf{a_{21}\,x_1} & + \mathbf{a_{22}\,x_2} & + & \mathbf{...} & + \mathbf{a_{2n}\,x_n} & = \mathbf{b_2} \\
\vdots & & & & \vdots & \\
\mathbf{a_{m1}\,x_1} & + \mathbf{a_{m2}\,x_2} & + & \mathbf{...} & + \mathbf{a_{mn}\,x_n} & = \mathbf{b_m}
\end{array}
$$

mit den Konstanten

$a_{\mathbf{ij}}$ für $i = 1, 2, ..., m$ und $j = 1, 2, ..., n$,

$b_{\mathbf{i}}$ für $i = 1, 2, ..., m$

und den Variablen

x_j für $j = 1, 2, ..., n$ heißt

Lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Variablen.

Sind alle $b_{\mathbf{i}}$ für i = 1, 2, ..., m gleich 0, so heißt das LGS **homogen**, ansonsten **inhomogen**.

Vektordarstellung:

$$\underline{a}_1\, x_1 \quad + \underline{a}_2\, x_2 \quad + \quad \dots \quad + \underline{a}_n\, x_n \quad = \quad \underline{b}$$

$$\text{mit} \quad \underline{a}_i \;=\; \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}, \text{für } i \;=\; 1, 2, \dots, n \quad \text{und} \quad \underline{b} \;=\; \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Matrixdarstellung:

$$\underline{A}\, \underline{x} = \underline{b}$$

$$\text{mit } \underline{A} \;=\; \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Begriff der Lösung eines LGS:

Definition: Ein Vektor $x = \hat{x}$, der die Bedingung $\underline{A}\, \underline{\hat{x}} = \underline{b}$ erfüllt (in eine Identität überführt), heißt **Lösung** des LGS $\underline{A}\, \underline{x} = \underline{b}$.

Beispiel:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ -3x_1 \qquad + \frac{1}{2}x_3 &= 10 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Lösung des LGS mit elementarer BT:

	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{b}$
$\underline{e}_1$	2	1	–1	5
$\underline{e}_2$	–3	0	1/2	10
$\underline{e}_3$	0	1	–1	0

	$\underline{a}_1$	$\underline{e}_1$	$\underline{a}_3$	$\underline{b}$
$\underline{a}_2$	2	1	–1	5
$\underline{e}_2$	–3	0	1/2	10
$\underline{e}_3$	–2	–1	0	–5

	$\underline{a}_1$	$\underline{e}_1$	$\underline{e}_2$	$\underline{b}$
$\underline{a}_2$	–4	1	2	25
$\underline{a}_3$	–6	0	2	20
$\underline{e}_3$	–2	–1	0	–5

	$\underline{e}_3$	$\underline{e}_1$	$\underline{e}_2$	$\underline{b}$
$\underline{a}_2$	–2	3	2	35
$\underline{a}_3$	–3	3	2	35
$\underline{a}_1$	–1/2	1/2	0	5/2

$$\underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{a}}_1 \cdot \underbrace{\frac{5}{2}}_{x_1} + \underline{\mathbf{a}}_2 \cdot \underbrace{\mathbf{35}}_{x_2} + \underline{\mathbf{a}}_3 \cdot \underbrace{\mathbf{35}}_{x_3}$$

Lösung des LGS: $\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 35 \\ 35 \end{pmatrix}$

(Probe!)

Zwei Fragen:

a) Lösbarkeit: Gibt es eine Lösung des LGS?

b) Eindeutigkeit: Wie viele Lösungen hat das LGS?

Satz: Ein LGS $\underline{A}\ \underline{x} = \underline{b}$ ist genau dann lösbar, wenn $\rho(\underline{A}) = \rho(\underline{A},\underline{b})$ gilt.

$\underline{A},\underline{b}$ heißt erweiterte Koeffizientenmatrix.

Im Beispiel oben ist $\rho(\underline{A}) = 3 = \rho(\underline{A},\underline{b})$.

Satz: Gegeben sei ein LGS $\underline{A}\ \underline{x} = \underline{b}$ mit n Variablen (d.h. $\underline{x} \in R^n$). Das LGS besitzt **genau eine Lösung** dann und nur dann, wenn $\rho(\underline{A}) = n$ ist.

Gilt dagegen $\rho(\underline{A}) = \rho(\underline{A},\underline{b}) = r < n$, dann sind $f = n - r$ Variablen frei wählbar, d.h. es existieren unendlich viele Lösungen.

f heißt Freiheitsgrad des LGS.

Beispiele:

1) obige Aufgabe: $\rho(\underline{A}) = 3 = n$

2) $3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 5$

LGS besteht aus einer Gleichung mit vier Variablen.

$\rho(\underline{A}) = \rho(\underline{A},\underline{b}) = 1, \quad n = 4, \quad f = 3;$

$x_4 = 5 - 3x_1 + x_2 - 2x_3, \quad x_1, x_2, x_3 \in R$ beliebig

3) $$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \phantom{{}- 2x_4} &= 1 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= -1 \end{aligned}$$

LGS besteht aus zwei Gleichungen mit vier Variablen.

Lösung des LGS mit elementarer BT:

	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{b}$
$\underline{e}_1$	2	2	2	0	1
$\underline{e}_2$	1	-4	3	-2	-1

	$\underline{e}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{b}$
$\underline{a}_1$	1/2	1	1	0	1/2
$\underline{e}_2$	–1/2	-5	2	-2	-3/2

	$\underline{e}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{e}_2$	$\underline{b}$
$\underline{a}_1$	1/2	1	1	0	1/2
$\underline{a}_4$	1/4	5/2	-1	-1/2	3/4

Allgemeine Lösung:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5/2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad x_2, x_3 \in \mathbf{R} \quad \text{beliebig}$$

Basisvariablen (BV) Nichtbasisvariablen (NBV)

Spezielle Lösungen erhalten wir durch Fixierung der frei wählbaren Variablen:

a) $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ $\Rightarrow$ $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_4 = -\frac{3}{4}$ also $\underline{x} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \\ 1 \\ -3/4 \end{pmatrix}$

b) $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ $\Rightarrow$ $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{7}{4}$ also $\underline{x} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 7/4 \end{pmatrix}$