

3.3 Basis eines Vektorraumes, elementare Basistransformation

Beispiele für n linear unabhängige Vektoren in \mathbb{R}^n :

$$\mathbb{R}^2 : \underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} ; \{ \underline{e}_1, \underline{e}_2 \}$$

$$\mathbb{R}^n : \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$$

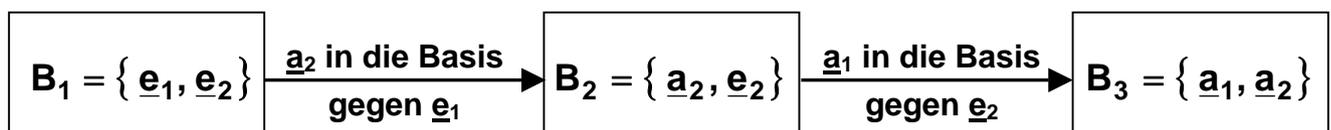
Definition: Eine Menge von n linear unabhängiger Vektoren im n-dimensionalen Vektorraum \mathbb{R}^n heißt **Basis** des Vektorraumes \mathbb{R}^n .

- Die Menge der Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist keine Basis.
- $\mathbf{B} = \{ \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n \}$ Basis \Rightarrow Bildung aller LK $\Rightarrow \mathbb{R}^n$
- ist $\underline{c} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$ es gibt eine eindeutige LK bezüglich der Basis:
$$\underline{c} = c_1 \cdot \underline{b}_1 + \dots + c_n \underline{b}_n$$

 c_1, \dots, c_n heißen Koordinaten bezüglich dieser Basis.

Übergang von einer Basis zu einer anderen !?

Beispiel:



Definition: Gegeben seien eine Basis $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n$ des \mathbb{R}^n und ein weiterer Vektor $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$.

Kann der Vektor \underline{a} mit einem Basisvektor \underline{b}_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, so vertauscht werden, dass $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_{i-1}, \underline{a}, \underline{b}_{i+1}, \dots, \underline{b}_n$ wieder eine Basis ist, so nennt man den Übergang zu dieser neuen Basis eine **elementare Basistransformation (BT)**.

Rechenschema der elementaren BT:

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ \leftarrow \begin{array}{c|cc} & \underline{a}_1 & \underline{a}_2 \\ \hline \underline{e}_1 & 2 & 1 \\ \underline{e}_2 & 1 & 3 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ \leftarrow \begin{array}{c|cc} & \underline{a}_1 & \underline{e}_1 \\ \hline \underline{a}_2 & 2 & 1 \\ \underline{e}_2 & -5 & -3 \end{array} \end{array}$$

$$\text{I} \quad \underline{a}_1 = 2\underline{e}_1 + \underline{e}_2$$

$$\text{II} \quad \underline{a}_2 = \underline{e}_1 + 3\underline{e}_2$$

$$\text{II} \rightarrow \underline{e}_1 = \underline{a}_2 - 3\underline{e}_2$$

$$\begin{aligned} \text{in I:} \quad \underline{a}_1 &= 2\underline{a}_2 - 6\underline{e}_2 + \underline{e}_2 \\ &= 2\underline{a}_2 - 5\underline{e}_2 \end{aligned}$$

$$\text{I} \quad \underline{a}_1 = 2\underline{a}_2 - 5\underline{e}_2$$

$$\text{II} \quad \underline{e}_1 = \underline{a}_2 - 3\underline{e}_2$$

$$\text{I} \rightarrow 5\underline{e}_2 = 2\underline{a}_2 - \underline{a}_1 \rightarrow \underline{e}_2 = \frac{2}{5}\underline{a}_2 - \frac{1}{5}\underline{a}_1$$

$$\begin{aligned} \text{in II:} \quad \underline{e}_1 &= \underline{a}_2 - 3 \left(\frac{2}{5}\underline{a}_2 - \frac{1}{5}\underline{a}_1 \right) \\ &= -\frac{1}{5}\underline{a}_2 + \frac{3}{5}\underline{a}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|cc} & \underline{e}_2 & \underline{e}_1 \\ \hline \underline{a}_2 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \underline{a}_1 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{array}$$

→ ordnen

$$\begin{array}{c|cc} & \underline{e}_1 & \underline{e}_2 \\ \hline \underline{a}_1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \underline{a}_2 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}$$

(Algorithmische) Regeln \mathbb{R}

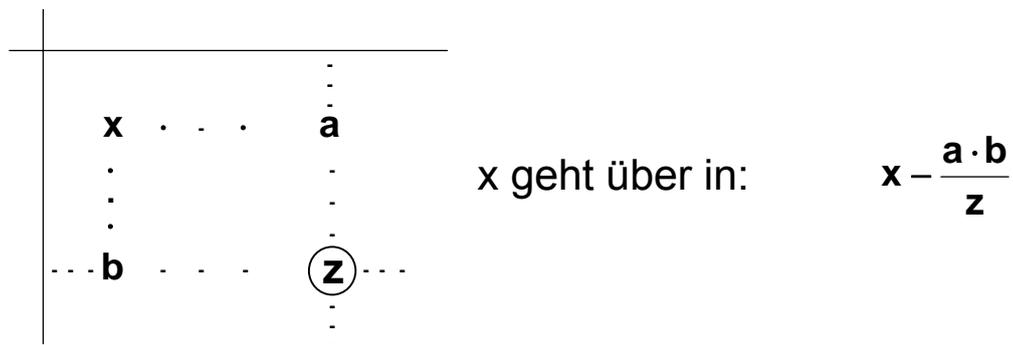
Wie erhalten wir die Elemente (Zahlen, Koordinaten) der neuen Tabelle aus den Elementen der alten Tabelle?

(1) **Zentralelement** (z) geht über in: $\frac{1}{z}$,

(2) die anderen Elemente der **Austauschzeile**
werden multipliziert mit: $\frac{1}{z}$,

(3) die anderen Elemente der **Austauschspalte**
werden multipliziert mit: $-\frac{1}{z}$,

(4) die restlichen Elemente werden
nach der **Kreuzregel** gebildet:



Elementare Basistransformation und lineare Abhängigkeit von Vektoren

Sind die Vektoren $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\underline{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

linear abhängig oder linear unabhängig?

	\underline{a}_1	\underline{a}_2	\underline{a}_3
\underline{e}_1	0	-10	-2
\underline{e}_2	1	2	0
\underline{e}_3	-1	3	1

	\underline{a}_1	\underline{a}_2	\underline{e}_3
\underline{e}_1	-2	-4	2
\underline{e}_2	1	2	0
\underline{a}_3	-1	3	1

	\underline{e}_2	\underline{a}_2	\underline{e}_3
\underline{e}_1	2	0	2
\underline{a}_1	1	2	0
\underline{a}_3	1	5	1

Das Zentralelement muss von 0 verschieden sein. \Rightarrow „Endtabelle“

Auswertung der Spalte für \underline{a}_2 :

$$\underline{a}_2 = 2\underline{a}_1 + 5\underline{a}_3$$

Satz:

Gegeben seien eine Basis in \mathbb{R}^n und r Vektoren $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_r \in \mathbb{R}^n$. Die Vektoren $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_r$ sind genau dann linear unabhängig, wenn sie sich durch elementare Basistransformationen alle zusammen in die Basis überführen lassen.

Der Rang einer Matrix

Allgemein gilt für eine beliebige Matrix: Die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen einer Matrix ist identisch mit der maximalen Anzahl linear unabhängiger Spalten dieser Matrix.

Definition: Die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten (bzw. Zeilen) einer Matrix \underline{A} heißt **Rang** ($\rho(\underline{A})$ auch $r(\underline{A})$) der Matrix \underline{A} .

$$\text{Sei z.B. } \underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \rho(\underline{A}) = ?$$

Rangbestimmung mit elementarer Basistransformation:

	\downarrow	\underline{a}_1	\underline{a}_2	\underline{a}_3
$\leftarrow \underline{e}_1$	1	0	2	
\underline{e}_2	3	-5	1	
\underline{e}_3	1	-1	1	
\underline{e}_4	-2	1	-3	

	\downarrow	\underline{e}_1	\underline{a}_2	\underline{a}_3
\underline{a}_1	1	0	2	
\underline{e}_2	-3	-5	-5	
\underline{e}_3	-1	-1	-1	
$\leftarrow \underline{e}_4$	2	1	1	

	\underline{e}_1	\underline{e}_4	\underline{a}_3
\underline{a}_1	1	0	2
\underline{e}_2	7	5	0
\underline{e}_3	1	1	0
\underline{a}_2	2	1	1

$\rightarrow \rho(\underline{A}) = 2$

Definition: Eine (n, n) -Matrix \underline{A} heißt **regulär**, wenn $\rho(\underline{A}) = n$ ist.

Ist $\rho(\underline{A}) < n$, so nennt man sie **singulär**.

Bezeichnung für regulär auch: „Matrix mit vollen Rang“.