3.2 Linearkombination und lineare Unabhängigkeit von Vektoren

3.2.1 Linearkombination von Vektoren

Geometrische Interpretation von Vektoren

$\mathbf{R^2}$: Paare reeller Zahlen $\longleftrightarrow$ Punkte in $\mathbf{x_1,\ x_2}$ – **Ebene,**

z.B. Punkt $\begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}$

$\updownarrow$

Vektor $\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}$

gerichtete Strecke (Länge, Richtung) auch $\overrightarrow{\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}}$.

$\underbrace{\alpha \cdot \underline{\mathbf{a}};\quad \underline{\mathbf{a}}_1 + \underline{\mathbf{a}}_2}$

Kombination: z.B. $\mathbf{2}\underline{\mathbf{a}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\underline{\mathbf{b}}$

$\mathbf{R^n}$: n-Tupel reeller Zahlen $\longleftrightarrow$ Punkte im n-dimensionalen Raum

$\updownarrow$

Vektoren der Dimension n

+ Struktur:

- Multiplikation mit Zahl
- Addition
- zusätzliche Eigenschaften

$\Downarrow$

$\boxed{\mathbf{R^n}\textbf{: n-dimensionaler Vektorraum}}$

R^1 - Gerade, R^2 - Ebene, R^3 - Raum

Definition:

Sind Vektoren $\underline{\mathbf{a}}_1, \cdots, \underline{\mathbf{a}}_k \in \mathbf{R}^n$ und k reelle Zahlen $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ gegeben, so nennt man den Vektor $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \underline{\mathbf{a}}_i$ eine **Linearkombination** der Vektoren $\underline{\mathbf{a}}_1, \cdots, \underline{\mathbf{a}}_k$

Beispiele:

1) $\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} -$ **LK von** $\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2$;

$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} -$ **LK von** $\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{e}}_3$;

$\underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ Dann ist

$\underline{\mathbf{x}} = 2\underline{\mathbf{a}} + 0{,}5\underline{\mathbf{b}}$ eine LK von $\underline{\mathbf{a}}$ und $\underline{\mathbf{b}}$ und andererseits ist

$\underline{\mathbf{x}} = 7\underline{\mathbf{e}}_1 + 5\underline{\mathbf{e}}_2$ eine LK von $\underline{\mathbf{e}}_1$ und $\underline{\mathbf{e}}_2$.

2) Lineares Gleichungssystem (LGS)

$$\begin{array}{rrrrcr} 2\,x_1 & -\;x_2 & +\,0{,}5\,x_3 & +\;x_4 & = & 6{,}4 \\ x_1 & & -2\,x_3 & & = & 0 \\ -\,x_1 & -2\,x_2 & +\;x_3 & +3\,x_4 & = & 10 \end{array}$$

äquivalente Vektor-Schreibweise:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\underline{a}_1 \in \mathbf{R}^3} \underbrace{x_1}_{\in \mathbf{R}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\underline{a}_2 \in \mathbf{R}^3} x_2 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{a}_3 \in \mathbf{R}^3} x_3 + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\underline{a}_4 \in \mathbf{R}^3} x_4 = \underbrace{\begin{pmatrix} 6{,}4 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}}_{\underline{b} \in \mathbf{R}^3}$$

Der Vektor $\underline{b}$ ist eine LK von $\underline{a}_1$, ..., $\underline{a}_4$.

Matrix-Schreibweise:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0{,}5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{Koeffizienten-matrix } \underline{A}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6{,}4 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

3.2.2 Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Wir betrachten **Systeme** von Vektoren:

(1) $\underline{\mathbf{a}}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{a}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Gibt es ein α mit $\underline{\mathbf{a}}_1 = \alpha \cdot \underline{\mathbf{a}}_2$? $\rightarrow$ Nein!

(Die Vektoren liegen auf verschiedenen Geraden)!

(2) $\underline{\mathbf{a}}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{a}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Lässt sich ein Vektor als LK der anderen Vektoren darstellen?

$\rightarrow$ Ja!

$$\underline{\mathbf{a}}_3 = \mathbf{1} \cdot \underline{\mathbf{a}}_1 + \mathbf{1} \cdot \underline{\mathbf{a}}_2$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\mathbf{a}}_1 + \underline{\mathbf{a}}_2 - \mathbf{1} \cdot \underline{\mathbf{a}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{0}}$$

Definition: Gegeben seien k Vektoren aus dem $\mathbf{R}^n : \underline{\mathbf{a}}_1, ..., \underline{\mathbf{a}}_k$.

Die Vektoren heißen **linear unabhängig**, wenn aus der Darstellung

$\underline{\mathbf{0}} = \alpha_1 \cdot \underline{\mathbf{a}}_1 + \alpha_2 \, \underline{\mathbf{a}}_2 + ... + \alpha_k \cdot \underline{\mathbf{a}}_k$ folgt, dass

$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0$ gilt.

Sonst nennen wir die Vektoren linear abhängig.

Bemerkungen:

1) Die Bedingung in der Definition sagt aus, dass sich der Null-Vektor nur auf die triviale Weise als LK der Vektoren $\underline{\mathbf{a}}_1, ..., \underline{\mathbf{a}}_k$ darstellen lässt.

2) $\underline{\mathbf{a}}_1, ..., \underline{\mathbf{a}}_k$ sind linear abhängig, wenn ein Vektor als LK der übrigen darstellbar ist. Das heißt, es existiert ein $\alpha_i, \quad i \in \{1, ..., k\} \quad \text{mit} \quad \alpha_i \neq 0$.

3) Eine Teilmenge von linear unabhängigen Vektoren ist auch linear unabhängig.

Beispiele: (1), (2) (siehe oben)

Sei k > n, dann gilt: k-Vektoren im R^n (mehr als n Vektoren) sind immer linear abhängig.

Die Einheitsvektoren

$$\underline{\mathbf{e}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \underline{\mathbf{e}}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \text{i-te Koordinate} \\ \\ \end{matrix}, \cdots, \quad \underline{\mathbf{e}}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

des R^n sind linear unabhängig.