

3. Elemente der linearen Algebra

3.1 Matrizen und Vektoren

Beispiel: Tierbestände (in einer Region):

3 Betriebe: Milchkühe, Schweine- und Rindermast

Betriebs-Nr.	M	S	R
1	34	2	14
2	120	-	-
3	150	40	30

Rechteckiges
Zahlenschema \rightarrow $\begin{pmatrix} 34 & 2 & 14 \\ 120 & 0 & 0 \\ 150 & 40 & 30 \end{pmatrix}$
MATRIX

3.1.1 Definition der Matrix

Definition: Eine (m, n) -Matrix ist ein System von $m \cdot n$ Zahlen

a_{ik} ($i = 1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, n$), die in einem rechteckigen Schema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}$$

von m Zeilen und von n Spalten angeordnet sind.

Die Zahlen des Schemas heißen Elemente der Matrix.

Symbolik: $\underline{\mathbf{A}} = (a_{ij})_{i=1 \dots m \quad j=1, \dots, n} = (a_{ij})_{(m,n)}$

i - Zeilenindex

j - Spaltenindex

Wo steht a_{32} ?

Typ (\underline{A}): = (m, n) , m - Anzahl der Zeilen
 n - Anzahl der Spalten

Man spricht auch kurz von einer $m \times n$ -Matrix.

3.1.2 Spezielle Matrizen

- 1) Matrix nur mit einer Spalte (Typ: $(m, 1)$): **Spaltenvektor**,
 Matrix nur mit einer Zeile (Typ: $(1, n)$): **Zeilenvektor**.

Bei Vektoren: Elemente \rightarrow Koordinaten

Anzahl der Elemente \rightarrow Dimension des Vektors

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m \end{pmatrix} \quad \text{Dimension von } \underline{a} \text{ ist } m.$$

Zeilenvektor $\underline{b} = (b_1 \dots b_n)$,

(Es gibt auch die Bezeichnung \bar{a})

Beispiel!

- 2) **Quadratische Matrix**: Matrix mit dem Typ: (n, n)

- 3) **Diagonalmatrix**: $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & & & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & 0 & & \cdot \\ \cdot & & 0 & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & & & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Hauptdiagonale

Beispiel!

$$4) \underline{E} = (e_{ij})_{n,n} : \begin{aligned} e_{ij} &= 0 \text{ für } i, j : i \neq j \\ e_{ii} &= 1 \text{ für } i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

\underline{E} heißt n-te **Einheitsmatrix** (n-ter Ordnung); in der Literatur auch **I**

5) Obere Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & & & \\ \cdot & \cdot & a_{33} & & & \cdot \\ \cdot & & 0 & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

3.1.3 Relationen zwischen Matrizen bzw. Vektoren

$$\underline{A} = \underline{B} : \begin{aligned} (1) & \text{ Typ ist gleich.} \\ (2) & \text{ Gleichgestellte Elemente stimmen überein.} \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 100 \\ 10 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 100 \\ 10 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} u_1 &= -2 \\ u_2 &= 1 \\ u_3 &= 5 \end{aligned}$$

$$\underline{A} \leq \underline{B} : \begin{aligned} (1) & \text{ Typ ist gleich.} \\ (2) & a_{ij} \leq b_{ij} \end{aligned}$$

analog $\underline{A} < \underline{B}$

Beispiel!

3.1.4 Transponierte einer Matrix

$\underline{A} \rightarrow$ Zeilen als Spalten schreiben $\rightarrow \underline{A}^T$ (auch \underline{A}')

Beispiel!

Gilt $\underline{A}^T = \underline{A}$, dann heißt \underline{A} **symmetrisch** ($a_{ij} = a_{ji}$).

Beispiel!

3.1.5 Verknüpfungen von Matrizen

Addition:

$\underline{A}, \underline{B}$ mit Typ: (m, n) ,

Eine Matrix \underline{C} mit $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ heißt Summe der Matrizen \underline{A} u. \underline{B} : $\underline{A} + \underline{B}$

analog $\underline{A} - \underline{B}$

Beispiel!

Multiplikation einer reellen Zahl mit einer Matrix:

$k \in \mathbb{R}, \quad k \cdot \underline{A} := (k \cdot a_{ij})$

Beispiel!

**Multiplikation eines Zeilenvektors mit einem Spaltenvektor
(auch Skalarprodukt oder inneres Produkt):**

Zeilenvektor \cdot Spaltenvektor,

Konvention: \underline{a} soll immer ein Spaltenvektor sein;

für einen Zeilenvektor schreiben wir dann: \underline{a}^T .

Definition: Die aus zwei Vektoren

$$\underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix} \quad \text{gebildete reelle Zahl (Skalar)}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \dots + \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{b}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_i$$

heißt **Skalarprodukt** $\underline{\mathbf{a}}^T \cdot \underline{\mathbf{b}}$ dieser Vektoren.

$$\underline{\mathbf{a}}^T \cdot \underline{\mathbf{b}} = (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \mathbf{a}_n) \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix}$$

Beispiele:

$$1) \quad (2 \quad 0 \quad 1 \quad 6) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot (-5) + 6 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

$$2) \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \underline{u}^T \cdot \underline{v} = 0 \quad (\text{orthogonal})$$

3) Die Gleichung $4x_1 + x_2 - 3x_3 = 10$ lässt sich mit Hilfe der Vektoren

$$\underline{a}^T = (4 \quad 1 \quad -3) \quad \text{und} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{als Skalarprodukt}$$

$$\underline{a}^T \underline{x} = 10 \quad \text{schreiben.}$$

Multiplikation von Matrizen

Beim Skalarprodukt: $\underline{a}^T \cdot \underline{b}$ gilt:

Typ $(\underline{a}^T) = (1, \mathbf{n})$, Typ $(\underline{b}) = (\mathbf{n}, 1)$.

Wir betrachten nun die Matrizen \underline{A} und \underline{B} mit

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit Typ $(\underline{A}) = (3, \mathbf{4})$, Typ $(\underline{B}) = (\mathbf{4}, 2)$

und bilden alle möglichen Skalarprodukte:

Spalte von \underline{B}	1	2
Zeile von \underline{A}		
1	3	4
2	-3	4
3	2	1

Definition: Gegeben seien eine (m, p) Matrix \underline{A} und eine (p, n) -Matrix \underline{B} ($m, n, p \in \mathbb{N}$).

Die (m, n) -Matrix $\underline{C} = (c_{ik})_{i=1 \dots m \quad k=1, \dots, n}$

deren Elemente c_{ik} das Skalarprodukt der i -ten Zeile von \underline{A} mit der k -ten Spalte von \underline{B} sind, heißt **Produkt $\underline{A} \cdot \underline{B}$** der Matrizen \underline{A} und \underline{B} .

Bemerkungen:

1)

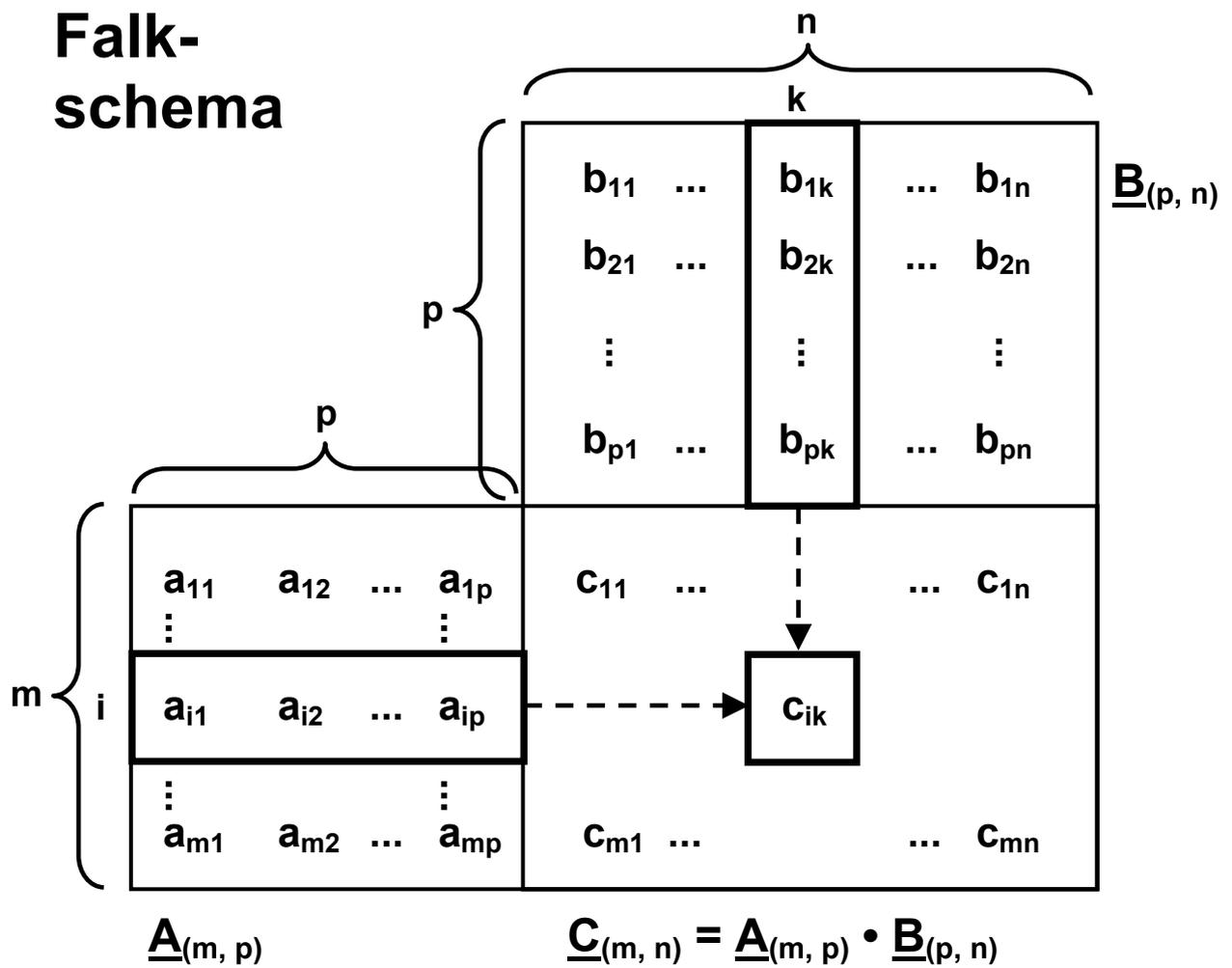
$$\underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{a}_{1p} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \mathbf{a}_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{a}_{mp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{b}_{1n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \mathbf{b}_{p1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{b}_{pn} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\sum_{r=1}^p \mathbf{a}_{ir} \cdot \mathbf{b}_{rk} \right)_{i=1 \dots m \quad k=1, \dots, n}$$

2) Günstig zur Berechnung des Produkts von Matrizen ist die Anordnung im Falk'schen Schema:

				1	0
				2	-1
				1	2
				0	0
1	0	2	-1	3	4
0	-2	1	3	-3	4
4	-1	0	0	2	1

Falk- schema



- 3) Die Multiplikation ist nur möglich, wenn die Anzahl der Spalten der ersten Matrix mit der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix übereinstimmt.
- 4) Die Reihenfolge der Faktoren ist zu beachten!
- 5) Es gilt: $(\underline{A} \cdot \underline{B})^T = \underline{B}^T \cdot \underline{A}^T$

Beispiele:

a)

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} \cdot \underline{E} = \underline{A} ;$$

$$\underline{E}_2 \cdot \underline{A} = \underline{A} ; \quad \underline{E}\underline{x} = \underline{x}$$

b)

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{B} \cdot \underline{A} = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ -5 & -10 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

also $\underline{A} \cdot \underline{B} \neq \underline{B} \cdot \underline{A}$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{0} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ aber } \underline{A} \neq \underline{0} \text{ und } \underline{B} \neq \underline{0}$$

c)

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 \\ 3x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Seien } \underline{\mathbf{x}}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{x}}^0 = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Matrixschreibweise des linearen Gleichungssystems (LGS)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{rclcl} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -4 \\ & & 3x_2 & + & x_3 & = & 10 \end{array}$$

$$\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}} \quad (\underline{\mathbf{x}}^0 \text{ ist eine Lösung des LGS!})$$

d) Ökonomisches Beispiel:

Rohstoffe \rightarrow Zwischenprodukte \rightarrow Endprodukte

3.1.6 Input / Output-Analyse

Amerikanischer Nationalökonom Leontief (Anfänge: 1936-1941), Volkswirtschaft unterschieden nach Sektoren (Zweigen, Stufen), Stoff- bzw. Wertflüsse (in Geldeinheiten), „Was wird gebraucht? Was kommt aus dem System heraus?“

- a) Einfache Struktur: Rohstoffe → System → Produkte
(vgl. d) oben)

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r_m \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{R}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

- b) Verflochtene Struktur: z.B. Beziehungen zwischen Vorleistungen, Produktion und Dienstleistungen

Allgemeines Vorgehen für $n = 3$:

$$\underline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \text{ Stoffflüsse;}$$

$$\underline{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \text{ Endverbrauchsvektor oder Endnachfrage}$$

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ Produktionsvektor}$$

Bilanzgleichungen:

$$x_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13} + y_1$$

$$x_2 = x_{21} + x_{22} + x_{23} + y_2$$

$$x_3 = x_{31} + x_{32} + x_{33} + y_3$$

$$\underline{x} = \underline{X} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underline{y}$$

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$$

heißen Inputkoeffizienten oder Koeffizienten des direkten Verbrauchs oder auch Produktionskoeffizienten.

Dann ist

$$\underline{x} = \underline{A} \underline{x} + \underline{y}$$

$$\text{g.d.w.} \quad \underline{E} \underline{x} = \underline{A} \underline{x} + \underline{y}$$

$$\text{g.d.w.} \quad \underline{E} \underline{x} - \underline{A} \underline{x} = \underline{y}$$

$$\text{g.d.w.} \quad (\underline{E} - \underline{A}) \underline{x} = \underline{y}$$

Zwei Fragestellungen:

(1) \underline{y} gegeben, \underline{x} gesucht? → später

(2) \underline{x} gegeben, so ist \underline{y} durch Matrizenmultiplikation berechenbar.

Beispiel:

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix} \text{ seien bekannt in einem bestimmten Jahr.}$$

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} x_{ij} \\ x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{20} & \frac{6}{30} \\ \frac{3}{10} & \frac{4}{20} & \frac{3}{30} \\ \frac{4}{10} & \frac{2}{20} & \frac{9}{30} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & -\frac{2}{20} & -\frac{6}{30} \\ -\frac{3}{10} & \frac{16}{20} & -\frac{3}{30} \\ -\frac{4}{10} & -\frac{2}{20} & \frac{21}{30} \end{pmatrix}$$

Die Lieferung für den Endverbrauch ergibt sich aus

$$(\underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{A}}) \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & -\frac{2}{20} & -\frac{6}{30} \\ -\frac{3}{10} & \frac{16}{20} & -\frac{3}{30} \\ -\frac{4}{10} & -\frac{2}{20} & \frac{21}{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Zweig 1} \\ \text{Zweig 2} \\ \text{Zweig 3} \end{matrix}$$