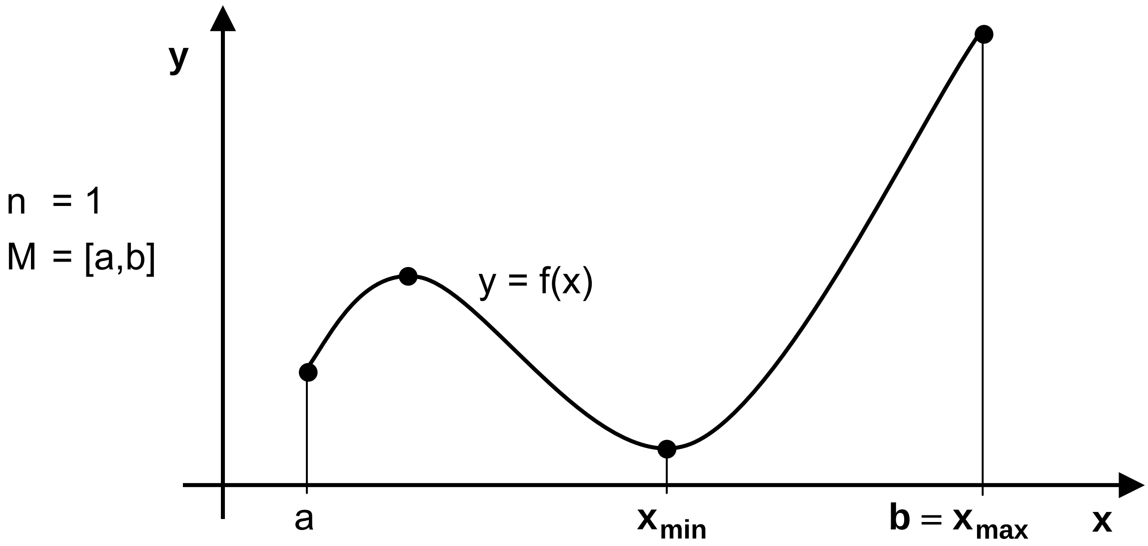
2.4 Verallgemeinerungen, Anwendungen

a) Globale Extrema

Definition:

Eine Funktion $\mathbf{f(\underline{x}): M \subset R^n \to R}$ hat an der Stelle $\mathbf{\underline{x}^0 \in M}$ ein globales Maximum, wenn $\mathbf{f(\underline{x}^0) \geq f(\underline{x}) \quad \forall\ \underline{x} \in M}$.



Allgemein gilt der Satz von Weierstrass:

Ist $\mathbf{f(\underline{x})}$ eine stetige Funktion auf einer beschränkten und abgeschlossenen Menge M, dann existiert das globale Maximum und Minimum von f bzgl. M.

Methodik:

- betrachte $\mathbf{f(\underline{x})}$ auf einer kompakten (beschränkten und abgeschlossenen) Menge, z.B. einem n-dimensionalen Quader,
- bestimme alle relativen Extrema,
- vergleiche diese mit den Werten von f auf dem Rand der Menge M.

b) Taylor-Formel

Beschreibung des Wertes einer Funktion in der Nähe eines bekannten Punktes mit Hilfe der (partiellen) Ableitungen

$\mathbf{n = 1}$: $\mathbf{x_0 \in R,\ f(x_0)}$ und die Ableitungen $\mathbf{f^{(k)}(x_0)}$

bis zur Ordnung m seien gegeben, betrachten

$\mathbf{x_0 + h \in R}$,

$$\mathbf{f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k\,!} \cdot h^k + R_{m+1}}$$

$\mathbf{n > 1}$: $\mathbf{\underline{x}^0 = (x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0) \in R^n}$,

$\mathbf{f(\underline{x}) : R^n \to R}$, $\qquad \mathbf{\underline{h} = (h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_n) \in R^n}$

die ersten und zweiten „partiellen“ Ableitungen von f im Punkt $\mathbf{\underline{x}^0}$ seien gegeben,

$$\mathbf{f(\underline{x}^0 + \underline{h}) = f(x_1^0 + h_1,\ x_2^0 + h_2,\ \ldots,\ x_n^0 + h_n)}$$

$$\mathbf{= f(\underline{x}^0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}^0) \cdot h_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(\underline{x}^0) \cdot h_i \cdot h_j + R}$$

c) Relative Extrema unter Nebenbedingungen

$\mathbf{f(\underline{x}): R^n \to R, \qquad g_i(\underline{x}): R^n \to R, i = 1, ..., m}$,

die partiellen Ableitungen seien stetig,

$$\mathbf{f(\underline{x}) \to min\ (max)}$$

unter den Bedingungen

$$\begin{aligned}
&\mathbf{g_1(\underline{x}) = 0}\\
&\mathbf{g_2(\underline{x}) = 0}\\
&\quad\vdots\\
&\mathbf{g_m(\underline{x}) = 0}
\end{aligned}$$

Wir betrachten für die **Lagrange-Funktion**

$$\mathbf{L(\underline{x}, \underline{\lambda}) := f(\underline{x}) + \lambda_1\, g_1(\underline{x}) + ... + \lambda_m\, g_m(\underline{x})}$$

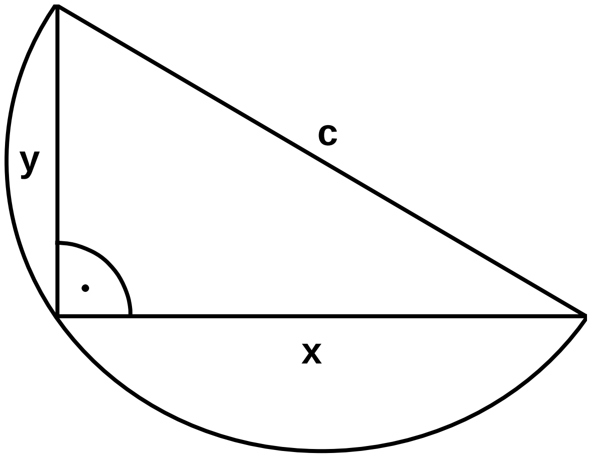
die notwendigen Bedingungen für ein lokales Extremum:

$$\mathbf{\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \qquad , \text{ für } i = 1, ..., n,}$$

$$\mathbf{\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0 \qquad , \text{ für } j = 1, ..., m}$$

und lösen dieses Gleichungssystem.

Beispiel:



Für welche x, y ist die Fläche des Dreiecks maximal bei gegebener Hypotenuse c?

$$\mathbf{f(x,y) = \frac{x \cdot y}{2} \rightarrow max}$$

unter der Bedingung $\mathbf{x^2 + y^2 = c^2}$

$$\mathbf{L(x,\ y,\ \lambda) = \frac{x \cdot y}{2} + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - c^2)}$$

$$\mathbf{\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{y}{2} + 2\ \lambda\, x = 0} \qquad (1)$$

$$\mathbf{\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{x}{2} + 2\ \lambda\, y = 0} \qquad (2)$$

(1) $\rightarrow \quad \lambda = -\mathbf{\frac{y}{4x}}$

in (2) einsetzen: $\quad \mathbf{\frac{x}{2} - \frac{y^2}{2x} = 0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x^2 = y^2}$

mit $\quad \mathbf{x^2 + y^2 = c^2 \quad (\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0)}$ folgt $\mathbf{x^2 = y^2 = \frac{c^2}{2}}$,

d.h. x = y (gleichschenkliges Dreieck).

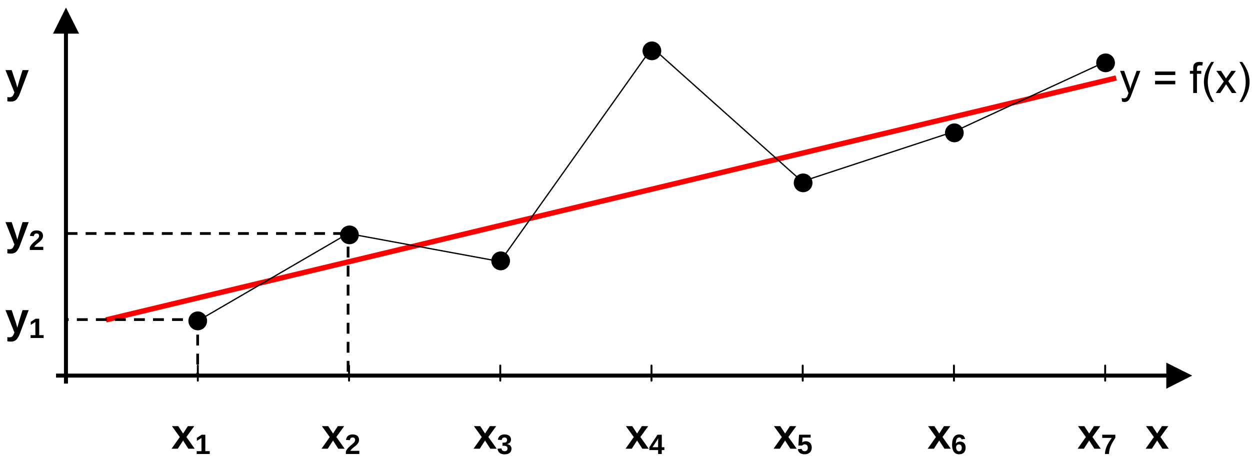
d) Trend und Regressionsanalyse

- Untersuchung des Verhaltens bzw. der Änderung bestimmter **Daten oder Werte** – ökonomische, biologische u.a.

  z.B. Bruttosozialprodukt, Spareinlagen, jährlicher Milchverbrauch der Bevölkerung u.ä.

- Aufstellung von **Zeitreihen:**

Jahr x	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Daten y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7



Gesucht: funktionale „Abhängigkeit" der Größe y von der Größe x

- Verschiedene Funktionsmodelle sind möglich:
  - Annahme eines **linearen** Zusammenhangs; gesucht ist also eine lineare Funktion $y = ax + b$, so dass die gegebenen Punkte „in der Nähe der Funktion liegen", d.h. gesucht sind die Parameter a und b; solch eine Funktion heißt lineare Trendfunktion (man spricht auch von Anpassung der Daten, fitting bzw. Ausgleichsrechnung).

- Annahme: die gesuchte Funktion ist ein **Polynom**

  $$\mathbf{y} = \sum_{\mathbf{i}=\mathbf{0}}^{\mathbf{n}} \mathbf{a_i}\, \mathbf{x^i},$$

  d.h. gesucht sind n, a_0, a_1, ..., a_n;

  n = 2 quadratische Anpassung

  n = 3 kubische Anpassung.

- Gesucht ist eine gute Anpassung durch eine **Exponentialfunktion** (z.B. bei großem Wachstum) $y = a \cdot e^{bx}$, d.h. gesucht sind die entsprechenden Parameter a und b.

• Bisher haben wir Zeitschritte x_1, x_2, x_3, ..., mit gleichen Abständen betrachtet (z.B. jährliche Messungen).⇒ **Trend**

Jetzt betrachten wir zwei Merkmale (Zufallsgrößen) x und y.

⇒ **Regression**

z.B.(1) x – Gewicht eines Tieres einer Population

y – Größe des Tieres.

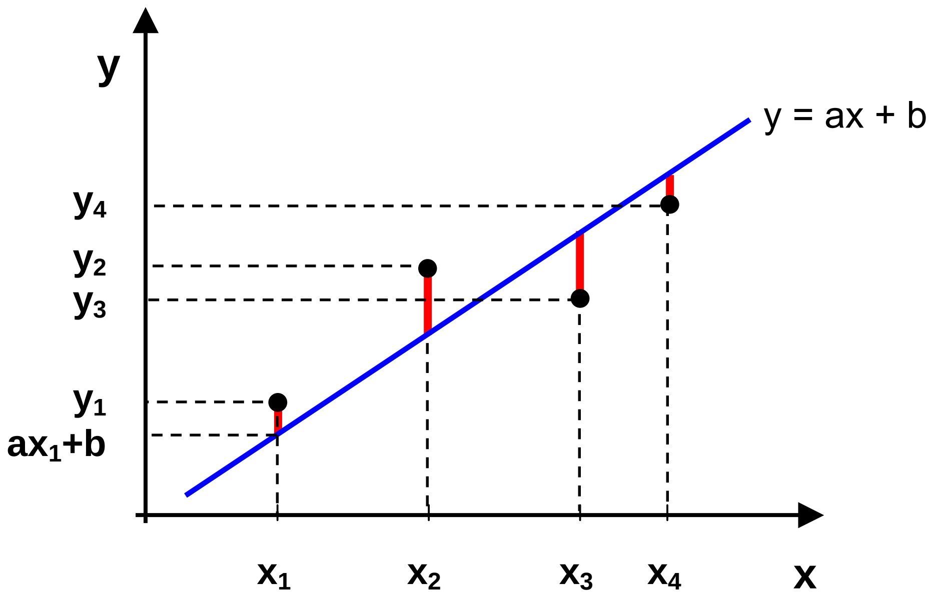
Wir sprechen von einer Stichprobe x_i, y_i für i = 1, 2, ..., k

(2) x – Niederschlagsmenge

y – Ertrag einer Agrarkultur (ZR).

Frage: Besteht ein Zusammenhang zwischen x und y?

Welcher Art ist dieser Zusammenhang, etwa linear?



$$\varepsilon_1 = y_1 - (ax_1 + b) \quad \rightarrow \quad \varepsilon_1^2 = (y_1 - ax_1 - b)^2$$

$$\varepsilon_2 = y_2 - (ax_2 + b) \quad \rightarrow \quad \varepsilon_2^2 = (y_2 - ax_2 - b)^2$$

$$\varepsilon_3 = ax_3 + b - y_3 \quad \rightarrow \quad \varepsilon_3^2 = (y_3 - ax_3 - b)^2$$

$$\varepsilon_4 = ax_4 + b - y_4 \quad \rightarrow \quad \varepsilon_4^2 = (y_4 - ax_4 - b)^2$$

$$\text{Summe:} \qquad \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$$

Wir haben damit eine Funktion von zwei Variablen (a ist der Anstieg und b ist der Schnittpunkt mit der y-Achse der gesuchten Geraden y = ax + b), die zu minimieren ist:

$$F \quad = \quad F(a,b) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} (y_1 - ax_i - b)^2 \quad \rightarrow \quad \min.$$

Methode der kleinsten Quadrate

$$\mathbf{F(a,b) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a \cdot x_i - b)^2 \to Min}$$

bei gegebener Stichprobe x_i , y_i für i = 1,...,n

$$\frac{\partial F}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - ax_i - b)\cdot(-1) = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)$$

$$-2\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b) = 0 \qquad \Big| : (-2)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} ax_i - \sum_{i=1}^{n} b = 0 \qquad \Big| \sum_{i=1}^{n} b = n \cdot b$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i = nb \qquad \Big| : n$$

$$b = \overline{y} - a\overline{x} \qquad \Big| \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \quad \text{Mittelwerte}$$

Die Gerade y=ax+b geht durch den Punkt

$$(\overline{x}, \overline{y})$$

$$F(a,b) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a \cdot x_i - b)^2 \rightarrow \text{Min}$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - ax_i - b) \cdot (-x_i) = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)x_i$$

$$-2\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)x_i = 0 \qquad \Big| :(-2)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \sum_{i=1}^{n} a x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} b x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\overline{y} - a\overline{x})\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \overline{y}\sum_{i=1}^{n} x_i = a\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) \qquad \Big| :\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \overline{y}\sum_{i=1}^{n} x_i}{\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)} \qquad b = \overline{y} - \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \overline{y}\sum_{i=1}^{n} x_i}{\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)} \cdot \overline{x}$$

$$\left(a = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \quad , \quad y = \overline{y} + a(x - \overline{x}) \right)$$

Überprüfung der hinreichenden Bedingung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial a \partial a} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial a \partial b} = \frac{\partial^2 F}{\partial b \partial a} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial b \partial b} = 2n$$

$$D = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot 2n - 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = 4n \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \tfrac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \right)$$

$$= 4n \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \right)$$

$$= 4n \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \cdot \overline{x}^2 \right) \quad \Big| \text{ siehe } (*)$$

$$= 4n \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \right) > 0$$

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 2x_i\overline{x} + \overline{x}^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\overline{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\overline{x}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\overline{x} \cdot n\overline{x} + n\overline{x}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2n\overline{x}^2 + n\overline{x}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2$$