2.3 Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher

$$\mathbf{y = f(\underline{x}) = f(x_1 \ldots , x_n) : M \subset R^n \to R}$$

eindeutige Abbildung von M in R

2.3.1 Beispiele, Stetigkeit

- Ertragsfunktion
- Graf der Funktion für n = 2 als gekrümmte Fläche darstellbar („Gebirge“)
- Paraboloid $\mathbf{y = x_1^2 + x_2^2}$
- Zielfunktion beim Futtermischungsmodell: minimale Kosten: $\mathbf{60x_1 + 45x_2 + 36x_3 = f(x_1, x_2, x_3)}$ ist eine lineare Funktion

Bemerkungen zur Stetigkeit von Funktionen

n = 1

$\mathbf{f(x)}$ **stetig in** $\mathbf{x_0}$: Wenn der Abstand von **x und** $\mathbf{x_o}$ klein ist, so ist auch der Abstand von $\mathbf{f(x)}$ **und** $\mathbf{f(x_0)}$ klein.

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

n > 1 $\quad \underline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n \qquad \underline{x}^0 = (x_1^{\ 0}, x_2^{\ 0}, ..., x_n^{\ 0}) \in R^n$ ....fest

$\mathbf{f(\underline{x})}$ **stetig in** $\mathbf{\underline{x}^0}$: Wenn der Abstand von $\underline{x}$ **und** $\underline{x}^0$ klein ist, so ist auch der Abstand von $\mathbf{f(\underline{x})}$ **und** $\mathbf{f(\underline{x}^0)}$ klein.

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}^0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}^0)$$

Hierbei wird der Abstand von n-Tupeln über die euklidische Norm definiert

$$\| \underline{x} - \underline{x}^0 \| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^{\ 0})^2} \ .$$

Heuristik: n = 1 Zeichnen der Kurve ohne „abzusetzen“

n = 2 „Funktionshaut ohne Löcher und Risse“.

2.3.2 Partielle Ableitung

Steigung der Funktion in Richtung der Achsen

partielle Ableitung:

Ableitung der Funktion $\mathbf{f(\underline{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)}$ nach **jeweils einer Variablen**, wobei die anderen Variablen beim Ableiten wie Konstanten behandelt werden.

Definition auch der partiellen Ableitungen erfolgt zuerst lokal an der Stelle $\mathbf{\underline{x}^0 \in R^n}$ mit Hilfe von Grenzwerten:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^0, ..., x_i^0 + h, ..., x_n^0) - f(x_1^0, ..., x_i^0, ..., x_n^0)}{h} \quad \text{für } i = 1, ..., n.$$

Bezeichnung: $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ (auch $\frac{\partial}{\partial x_i} f$, $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ **bzw.** f_{x_i}, f_i)

geometrische Interpretation:

Anstieg der Funktion in Richtung der Achsen.

2. partielle Ableitungen (partielle Ableitungen 2. Ordnung):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$ in Kurzschreibweise auch f_{ij} ;

Es wird also die partielle Ableitung der Funktion nach x_i noch mal nach der Variablen x_j partiell abgeleitet.

Insgesamt gibt es n^2 Ableitungsfunktionen 2. Ordnung:

$$\begin{array}{cccc}
\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_2}, & \ldots, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_n} \\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \, \partial x_1}, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, & \ldots, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \, \partial x_n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \, \partial x_1}, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \, \partial x_2}, & \ldots, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}
\end{array}$$

Beispiel 1: $y = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 \quad , \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2$$

Beispiel 2: $f(x_1, x_2) = 5 + 2x_1 + 5x_1^2 + 8x_1 x_2 + 7x_2 + 5x_2^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2 + 10x_1 + 8x_2 \quad , \frac{\partial f}{\partial x_2} = 8x_1 + 7 + 10x_2 ,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_1} = 10 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_2} = 8$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \, \partial x_1} = 8 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \, \partial x_2} = 10$$

2.3.3 Lokale Extrema bei Funktionen mit mehreren Variablen

(1) Eine Variable: $\mathbf{x} \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{f(x)}$,

wir suchen ein lokales (relatives) Maximum bzw. Minimum der Funktion f(x)

$\Downarrow$

notwendige Bedingung: $\mathbf{f'(x) = 0}$,

hinreichende Bedingung: $\mathbf{f''(x) < 0}$ lokales Maximum

bzw. $\mathbf{f''(x) > 0}$ lokales Minimum.

(2) n Variablen: $\mathbf{(x_1, x_2, ..., x_n) = \underline{x} \in R^n}$

Definition:

> Die Funktion $\mathbf{f(\underline{x})}$ hat in einem inneren Punkt $\mathbf{\underline{x}^0}$ des Definitionsbereiches ein lokales Maximum (bzw. Minimum), wenn eine reelle Zahl $\delta > \mathbf{0}$ existiert mit
> $\mathbf{f(\underline{x}) \le f(\underline{x}^0)}$ $\mathbf{(bzw.\ f(\underline{x}) \ge f(\underline{x}^0))}$ für alle $\mathbf{\underline{x} \in R^n}$ mit $\| \mathbf{\underline{x} - \underline{x}^0} \| < \delta$.

Sammelbegriff: lokales Extremum

$\left\{ \mathbf{\underline{x} \in R^n} \mid \| \mathbf{\underline{x} - \underline{x}^0} \| < \delta \right\}$ heißt Umgebung von $\mathbf{\underline{x}^0 \in R^n}$

Notwendige Bedingung für lokale Extrema:

Satz: Wenn $\mathbf{f(\underline{x})}$ im Punkt $\mathbf{\underline{x}^0 \in R^n}$ ein lokales Extremum besitzt und in diesem Punkt alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x_i}}$ existieren, so gilt $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x_i}}\mathbf{(\underline{x}^0) = 0 \quad \forall\, i = 1, ..., n}$.

Wir haben n Gleichungen. Die Lösungen dieses Gleichungssystems heißen **stationäre Punkte**.

Im Weiteren sei n = 2, d.h. wir haben zwei Variablen $\mathbf{x_1, x_2}$.

Dann gibt es eine geometrische Interpretation der notwendigen Bedingungen:

die Tangentialebene an $\mathbf{f(x_1, x_2)}$ im Punkt $\mathbf{\underline{x}^0 = (x_1^0,\ x_2^0)}$ ist parallel zur $\mathbf{x_1, x_2 - Ebene}$.

Wir benötigen auch hier eine hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum.

Beispiel: Sattelfläche $\mathbf{f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2}$

Hinreichende Bedingungen für lokale Extrema:

$\mathbf{f(x_1, x_2)}$ sei in einer Umgebung eines stationären Punktes $\underline{\mathbf{x}}^{\mathbf{0}} = (\mathbf{x_1^0}, \mathbf{x_2^0})$ definiert, stetig, es existieren alle 1. und 2. partiellen Ableitungen und diese seien auch stetig.

Satz: $\mathbf{f(x_1, x_2)}$ hat in dem stationären Punkt $\underline{\mathbf{x}}^{\mathbf{0}} = (\mathbf{x_1^0}, \mathbf{x_2^0})$ ein lokales Minimum, wenn

(1) $$\mathbf{D} = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x_1}\, \partial \mathbf{x_1}} (\underline{\mathbf{x}}^{\mathbf{0}}) \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x_2}\, \partial \mathbf{x_2}} (\underline{\mathbf{x}}^{\mathbf{0}}) - \left[\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x_1}\, \partial \mathbf{x_2}} (\underline{\mathbf{x}}^{\mathbf{0}}) \right]^2 > \mathbf{0}$$

und

(2) $$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x_1}\, \partial \mathbf{x_1}} (\underline{\mathbf{x}}^{\mathbf{0}}) > \mathbf{0}\,.$$

Ist D > 0 und $\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x_1}\, \partial \mathbf{x_1}} (\underline{\mathbf{x}}^{\mathbf{0}}) < \mathbf{0}$, so hat f ein lokales Maximum in $\underline{\mathbf{x}}^{\mathbf{0}}$.

Im Beispiel 2 aus Abschnitt 2.3.2 hatten wir für die Funktion

$$\mathbf{f(x_1, x_2) = 5 + 2x_1 + 5x_1^2 + 8x_1 x_2 + 7x_2 + 5x_2^2}$$

alle 1. und 2. partiellen Ableitungen bestimmt.

Als notwendige Bedingung erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{2 + 10x_1 + 8x_2 = 0}$$

$$\mathbf{7 + 8x_1 + 10x_2 = 0}\,.$$

Als Lösung erhalten wir einen stationären Punkt $\underline{\mathbf{x}}^{\mathbf{0}} = \mathbf{(1, -\frac{3}{2})}$.

Die hinreichende Bedingung lautet

(1) $\mathbf{D = 10 \cdot 10 - 8^2 = 36 > 0}$ und

(2) $\dfrac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x_1}\, \partial \mathbf{x_1}} = \mathbf{10 > 0}$.

(1) sichert das Vorliegen eines lokalen Extremums an der Stelle $\underline{\mathbf{x}}^{\mathbf{0}}$, aus (2) folgt, dass es sich um ein lokales Minimum handelt.