

2.3 Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher

$$y = f(\underline{x}) = f(x_1, \dots, x_n) : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

eindeutige Abbildung von M in \mathbb{R}

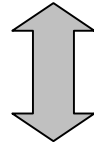
2.3.1 Beispiele, Stetigkeit

- Ertragsfunktion
- Graf der Funktion für $n = 2$ als gekrümmte Fläche darstellbar („Gebirge“)
- Paraboloid $y = x_1^2 + x_2^2$
- Zielfunktion beim Futtermischungsmodell:
minimale Kosten: $60x_1 + 45x_2 + 36x_3 = f(x_1, x_2, x_3)$
ist eine lineare Funktion

Bemerkungen zur Stetigkeit von Funktionen

$n = 1$

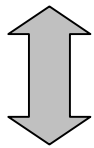
$f(x)$ stetig in x_0 : Wenn der Abstand von x und x_0 klein ist, so ist auch der Abstand von $f(x)$ und $f(x_0)$ klein.



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$n > 1$ $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ $\underline{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ fest

$f(\underline{x})$ stetig in \underline{x}^0 : Wenn der Abstand von \underline{x} und \underline{x}^0 klein ist, so ist auch der Abstand von $f(\underline{x})$ und $f(\underline{x}^0)$ klein.



$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}^0)$$

Hierbei wird der Abstand von n -Tupeln über die euklidische Norm definiert

$$\| \underline{x} - \underline{x}^0 \| := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2} .$$

Heuristik: $n = 1$ Zeichnen der Kurve ohne „abzusetzen“
 $n = 2$ „Funktionshaut ohne Löcher und Risse“.

2.3.2 Partielle Ableitung

Steigung der Funktion in Richtung der Achsen

partielle Ableitung:

Ableitung der Funktion $f(\underline{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nach **jeweils einer Variablen**, wobei die anderen Variablen beim Ableiten wie Konstanten behandelt werden.

Definition auch der partiellen Ableitungen erfolgt zuerst lokal an der Stelle $\underline{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ mit Hilfe von Grenzwerten:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_i^0 + h, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n^0)}{h} \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Bezeichnung: $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ (auch $\frac{\partial}{\partial x_i} f$, $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ bzw. f_{x_i} , f_i)

geometrische Interpretation:

Anstieg der Funktion in Richtung der Achsen.

2. partielle Ableitungen (partielle Ableitungen 2. Ordnung):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \text{ in Kurzschreibweise auch } f_{ij};$$

Es wird also die partielle Ableitung der Funktion nach x_i noch mal nach der Variablen x_j partiell abgeleitet.

Insgesamt gibt es n^2 Ableitungsfunktionen 2. Ordnung:

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, & \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, & \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}, & \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{array}$$

Beispiel 1: $y = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2$$

Beispiel 2: $f(x_1, x_2) = 5 + 2x_1 + 5x_1^2 + 8x_1 x_2 + 7x_2 + 5x_2^2$

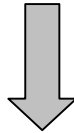
$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2 + 10x_1 + 8x_2 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 8x_1 + 7 + 10x_2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} = 10 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 8$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 8 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} = 10$$

2.3.3 Lokale Extrema bei Funktionen mit mehreren Variablen

- (1) Eine Variable: $x \in \mathbb{R}$, $y = f(x)$,
wir suchen ein lokales (relatives) Maximum bzw. Minimum der
Funktion $f(x)$



notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$,
hinreichende Bedingung: $f''(x) < 0$ lokales Maximum
bzw. $f''(x) > 0$ lokales Minimum.

- (2) n Variablen: $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \underline{x} \in \mathbb{R}^n$

Definition:

Die Funktion $f(\underline{x})$ hat in einem inneren Punkt \underline{x}^0 des
Definitionsbereiches ein lokales Maximum (bzw. Minimum),
wenn eine reelle Zahl $\delta > 0$ existiert mit
 $f(\underline{x}) \leq f(\underline{x}^0)$ (bzw. $f(\underline{x}) \geq f(\underline{x}^0)$) für alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\underline{x} - \underline{x}^0\| < \delta$.

Sammelbegriff: lokales Extremum

$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\underline{x} - \underline{x}^0\| < \delta\}$ heißt Umgebung von $\underline{x}^0 \in \mathbb{R}^n$

Notwendige Bedingung für lokale Extrema:

Satz: Wenn $f(\underline{x})$ im Punkt $\underline{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ ein lokales Extremum besitzt und in diesem Punkt alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existieren, so

$$\text{gilt } \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}^0) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Wir haben n Gleichungen. Die Lösungen dieses Gleichungssystems heißen **stationäre Punkte**.

Im Weiteren sei $n = 2$, d.h. wir haben zwei Variablen x_1, x_2 .

Dann gibt es eine geometrische Interpretation der notwendigen Bedingungen:

die Tangentialebene an $f(x_1, x_2)$ im Punkt $\underline{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$ ist parallel zur x_1, x_2 – Ebene.

Wir benötigen auch hier eine hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum.

Beispiel: Sattelfläche $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$

Hinreichende Bedingungen für lokale Extrema:

$f(x_1, x_2)$ sei in einer Umgebung eines stationären Punktes $\underline{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$ definiert, stetig, es existieren alle 1. und 2. partiellen Ableitungen und diese seien auch stetig.

Satz: $f(x_1, x_2)$ hat in dem stationären Punkt $\underline{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$ ein lokales Minimum, wenn

$$(1) \quad D = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\underline{x}^0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(\underline{x}^0) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\underline{x}^0) \right]^2 > 0$$

und

$$(2) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\underline{x}^0) > 0.$$

Ist $D > 0$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\underline{x}^0) < 0$, so hat f ein lokales Maximum in \underline{x}^0 .

Im Beispiel 2 aus Abschnitt 2.3.2 hatten wir für die Funktion

$$f(x_1, x_2) = 5 + 2x_1 + 5x_1^2 + 8x_1 x_2 + 7x_2 + 5x_2^2$$

alle 1. und 2. partiellen Ableitungen bestimmt.

Als notwendige Bedingung erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$2 + 10x_1 + 8x_2 = 0$$

$$7 + 8x_1 + 10x_2 = 0.$$

Als Lösung erhalten wir einen stationären Punkt $\underline{x}^0 = (1, -\frac{3}{2})$.

Die hinreichende Bedingung lautet

$$(1) \quad \mathbf{D} = 10 \cdot 10 - 8^2 = 36 > 0 \text{ und}$$

$$(2) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} = 10 > 0.$$

(1) sichert das Vorliegen eines lokalen Extremums an der Stelle \underline{x}^0 ,
aus (2) folgt, dass es sich um ein lokales Minimum handelt.