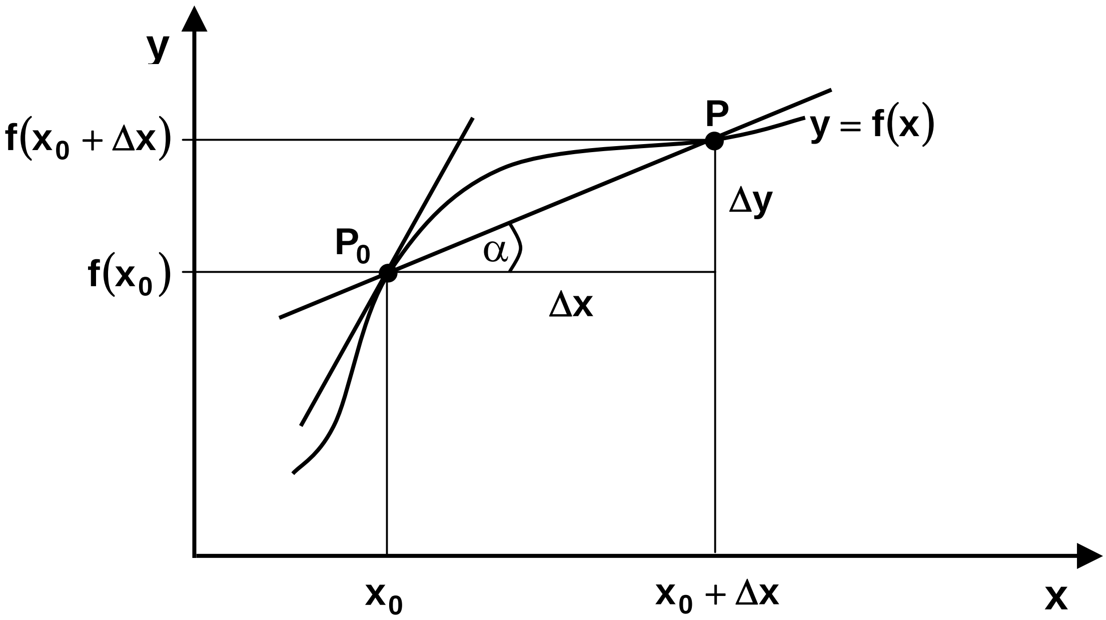
2.2 Differentialrechnung, Integralrechnung

Bei vielen ökonomischen und anderen praktischen Fragestellungen interessiert das Änderungsverhalten von Funktionen.



Differenzenquotient: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

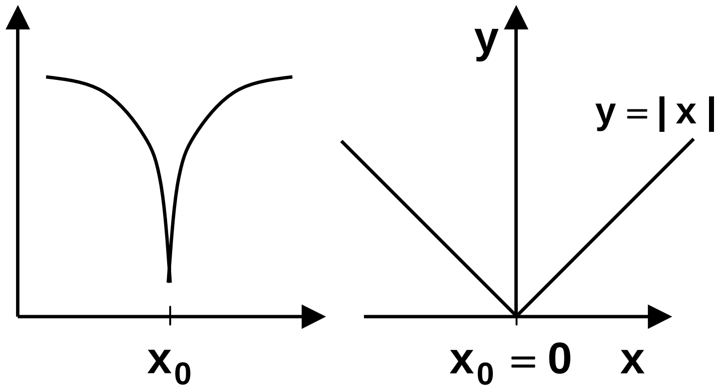
Übergang zum Grenzwert (rechts- und linksseitig)

existiert der Differentialquotient

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad ?$$

nein

f nicht differenzierbar in x_0



ja

f differenzierbar in x_0

Der Grenzwert heißt Ableitung der Funktion f im Punkt x_0

mit der Bezeichnung $f'(x_0)$

(Anstieg, Steigung der Funktion in x_0;

Anstieg der Tangente an die Funktion $f(x)$ im Punkt x_0).

Die Funktion $\mathbf{y = f(x)}$ heißt differenzierbar, wenn $\mathbf{f(x)}$

in allen Punkten des Definitionsbereichs differenzierbar ist.

Die Ableitungen in allen Punkten bilden wieder eine Funktion

der Variablen x, die mit $\mathbf{f'(x)}$ oder kurz $\mathbf{f'}$ (nach Lagrange)

bzw. mit $\mathbf{\frac{dy}{dx}}$ (nach Leibnitz) bezeichnet wird.

Technik des Differenzierens:

Ableitung der Grundfunktionen

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$ $\begin{cases} a) & n \in N,\ x \in R \\ b) & n \in G,\ x \neq 0 \\ c) & n \in R,\ x > 0 \end{cases}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
a^x	$a^x \cdot \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$

+

Ableitungsregeln

Summenregel	$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
Produktregel	$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotientenregel	$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x))}{(g(x))^2}$
Kettenregel	$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

⇓

Ableitung „verknüpfter“ Funktionen

Höhere Ableitungen:

Ableitungen der ersten Ableitung $\mathbf{f'(x)} \Rightarrow \mathbf{f''(x)}$ zweite Ableitung

3. Ableitung: $\mathbf{f'''(x)}$

n. Ableitung: $\mathbf{f^{(n)}(x)}$

Anwendungen der Ableitung von Funktionen:

a) Extremwertuntersuchungen

lokales Maximum/Minimum an der Stelle $\mathbf{x_0}$

$\mathbf{(f'(x_0) = 0 \quad und \quad f''(x_0) \neq 0)}$

b) Kurvendiskussion

$\mathbf{y = f(x)}$ $\rightarrow$ Eigenschaften $\rightarrow$ Graf der Funktion

c) Ökonomie und Naturwissenschaften

<u>Grenzfunktion:</u>

$\mathbf{G(x) = E(x) - K(x) \rightarrow max}$

Gewinn als Erlös minus Kosten

notwendige Bedingung

$$\mathbf{G'(x) = E'(x) - K'(x) = 0}$$

bzw. $\mathbf{E'(x) = K'(x)}$ Grenzerlös gleich Grenzkosten

<u>Elastizität:</u>

Preiselastizität der Nachfrage (um wie viel % ändert sich die Nachfrage, wenn sich der aktuelle Preis um 1% ändert?)

$$\varepsilon_{\mathbf{n,p}} \mathbf{:= n'(p) \cdot \frac{p}{n(p)}}$$

<u>Wachstumsfunktionen:</u>

exponentiell; mit Sättigung (logistische Funktion,

sigmotisch (s-förmig))

Integralrechnung

(1) Unbestimmtes Integral

Umkehren des Differenzierens (schwieriger)

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) \mid F'(x) = f(x)\}$$

Menge aller Stammfunktionen F von f (additive Konstante c)

(2) Bestimmtes Integral (Riemannsches Integral) als Grenzwert

definiert $\int_a^b f(x)\,dx$

misst die Fläche zwischen dem Grafen von f und der x-Achse im Bereich von a bis b.

(3) Berechnung mit einer Stammfunktion

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b$$

Beispiel: $\int_1^2 3x^2\,dx = x^3\Big|_1^2 = 2^3 - 1^3 = 8 - 1 = 7$