

## 1.2 Das Summenzeichen

Bezugnahme auf das Futtermischungsproblem:

indizierte Variablen:

$x_i$  - Menge der Futtersorte  $F_i$

$p_i$  - Preis je ME ( $p_1 = 60$ ,  $p_2 = 45$ ,  $p_3 = 36$ )

Lösung:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 8$ ,  $x_3 = 56$

ZF: 2376

$$\text{ZF: } 60x_1 + 45x_2 + 36x_3 = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = \sum_{i=1}^3 p_i x_i$$

$$\text{allgemein: } \sum_{i=k}^n a_i = a_k + a_{k+1} + \dots + a_n$$

Summations-Variable  $a_i$

(Ausdruck, in dem  $i$  meist enthalten ist, aber nicht sein muss.)

Summations-Index:  $i$

Summations-Grenzen:  $k, n$

$$\text{Beispiele: } \sum_{i=1}^3 i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36$$

$$\sum_{i=-2}^4 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 7 \cdot 3 = 21$$

## Doppelsummen, mehrfache Summen

Die Summationsvariable kann selbst eine Summe sein.

Beispiel:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^2 \left( \sum_{j=-1}^1 2^i \cdot (3j+1) \right) &= \sum_{j=-1}^1 2^1 (3j+1) + \sum_{j=-1}^1 2^2 (3j+1) \\ &= 2(-3+1) + 2(3 \cdot 0 + 1) + 2(3+1) \\ &\quad + 2^2(-3+1) + 4(3 \cdot 0 + 1) + 4(3+1) \\ &= -4 + 2 + 8 \\ &\quad - 8 + 4 + 16 = 18 \\ &= \sum_{j=-1}^1 \sum_{i=1}^2 2^i \cdot (3j+1)\end{aligned}$$

---

## Produktzeichen

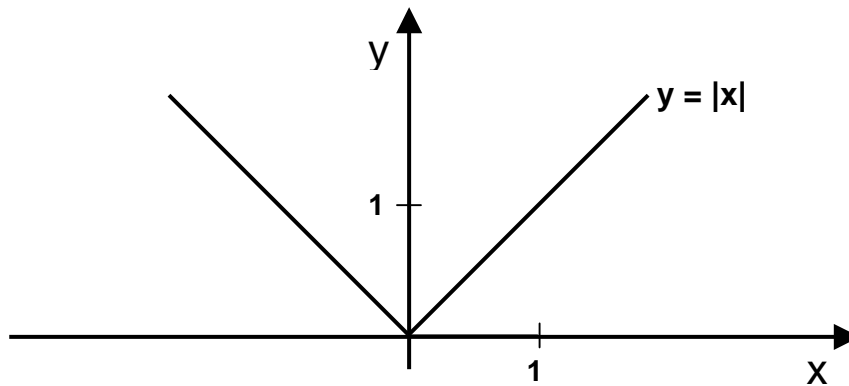
$\prod$  (wird analog benutzt)

Beispiel:

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = \prod_{i=1}^n i$$

### 1.3 Der absolute Betrag einer reellen Zahl

Definition:  $|x| := \begin{cases} x, & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x, & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$       **absoluter Betrag** von  $x \in \mathbb{R}$



Folgerungen:

- $|x| = \max \{ x, -x \}$
- $x \leq |x|, \quad -x \leq |x|, \quad |-x| = |x|$
- Dreiecksungleichung:  $x, y \in \mathbb{R}$

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Verallgemeinerung:

$$|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n| \quad (\text{vollständige Induktion})$$

## Ungleichungen mit Beträgen

$$(1) |x| \leq a \leftrightarrow -a \leq x \leq a \leftrightarrow x \in [-a, a]$$

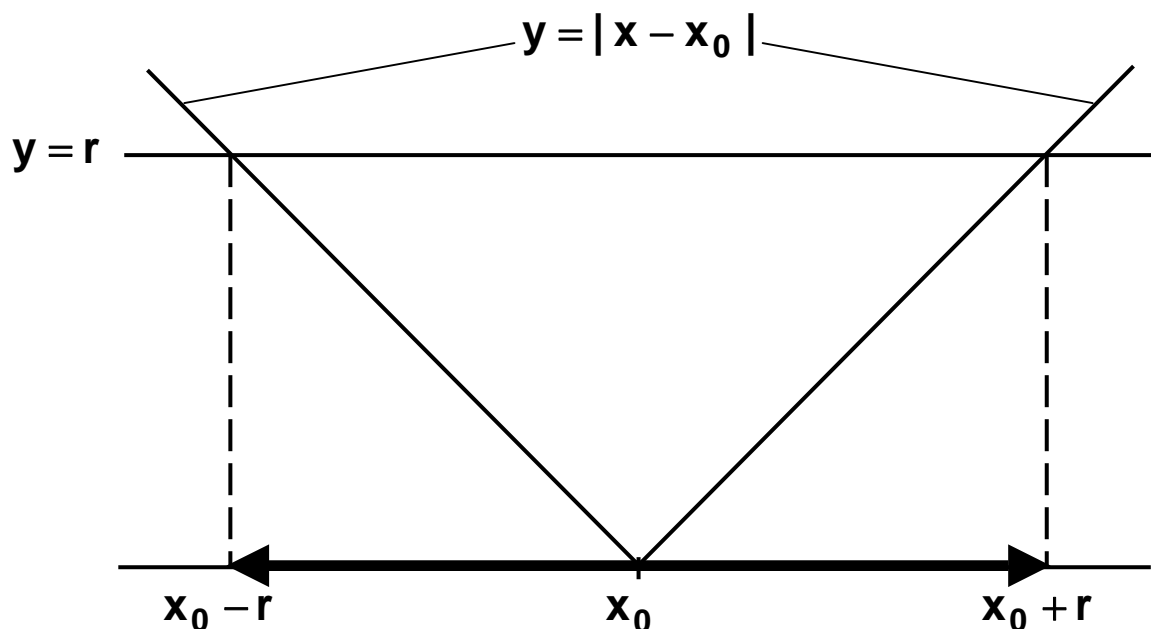
abgeschlossenes Intervall

$$(2) r > 0, \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq x_0, x < x_0 + r\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x < x_0, x > x_0 - r\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid -r < x - x_0 < r\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x_0 - r < x < x_0 + r\} = (x_0 - r, x_0 + r)$$

offenes Intervall



## 1.4 Grenzwert

Fundamentale Idee in der Analyse

Anwendung: Ableitung einer Funktion; Elastizität

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

bedeutet:  $f(x)$  ist beliebig dicht bei  $b$  für alle  $x$ ,  
die dicht genug bei  $a$  liegen.

Was bedeutet „**dicht bei**“?  $|x - a|$   $\rightarrow$  klein,  
 $|f(x) - b|$   $\rightarrow$  klein,

also

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ g.d.w. } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |f(x) - b| < \varepsilon \text{ falls } |x - a| < \delta.$$

Beispiele:

$$\lim_{x \rightarrow 3} 2x = 6,$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$  existiert nicht  $\left( \frac{1}{x} \text{ ist eine große positive oder große negative Zahl} \right)$

